На правах рукописи

Жежерун Андрей Александрович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СЛОЖНОГО ПОВЕДЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С НЕГЛАДКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2009

Работа выполнена на кафедре прикладной математики
Самарского государственного областного университета (Наяновой)

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Щепакина Елена Анатольевна
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Колесов Андрей Юрьевич
	доктор физико-математических наук, профессор Семёнов Михаил Евгеньевич
Ведущая организация:	Институт проблем передачи информации (ИППИ) РАН им. А.А. Харкевича

Защита состоится 29 мая 2009 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 в Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан «___» апреля 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Диссертация посвящена анализу сложного поведения в динамических моделях с гистерезисными нелинейностями, а также в моделях с сингулярными возмущениями.

Модели с гистерезисными элементами часто возникают при решении задач физики, механики, экономики и др. Основы математической теории систем с гистерезисом, трактующей гистерезисные нелинейности как операторы или преобразователи с пространствами состояний, были созданы в 70-80-х годах прошлого века М.А. Красносельским и его коллегами. Предложенное единое математическое описание, охватывающее многие феноменологические модели гистерезиса и нелокальной памяти, позволило развить эффективные методы качественного и численного исследования моделей с гистерезисными элементами. Математические модели таких сложных систем, как правило, одновременно включают дифференциальные уравнения и операторные соотношения между частью переменных; их исследование, в основном в случае простых гистерезисных операторов типа реле и люфтов, берет свое начало в классических работах по теории управления и теории колебаний. Теория гистерезиса и ее приложения подробно изучена в работах М. Брокате, А. Визинтина, М.А. Красносельского, П. Крейчи, И. Майергойза, А.В. Покровского и других авторов.

В настоящее время свойства различных классов гистерезисных операторов достаточно хорошо изучены, включая непрерывность и липшицевость в функциональных пространствах, монотонность и др.; к важным общим свойствам относится физическая реализуемость, то есть независимость значений оператора от будущего, и коммутативность с монотонными преобразованиями времени: при изменении скорости изменения входа точно так же меняется скорость изменения выхода. В то же время вопросы, относящиеся к различным аспектам динамики систем с гистерезисом и, в том числе, колебаниям и бифуркациям, остаются открытыми. Их изучение осложняется тем, что гистерезисные операторы не обладают свойством дифференцируемости и могут иметь сложные пространства состояний. К таким операторам относится оператор Прейсаха, возникающий при моделировании электронных осцилляторов с ферромагнитными элементами, а также в гидрологических моделях проникновения осадков в почву, которые изучаются в настоящей работе. Подобные вопросы рассматривались также в работах В.С. Козякина, М.А. Красносельского, А.М. Красносельского, Н.А. Кузнецова, Д.И. Рачинского, М.Е. Семёнова и др.

Другим типом широко используемых на практике динамических моделей являются модели с сингулярными возмущениями. Такие модели применяются для анализа аэрокосмических, электрических, электромеханических, энергетических, роботехнических, химических, биохимических, биологических, экономических и др. систем. Первые результаты по теории сингулярно возмущенных систем получены А.Н. Тихоновым. Дальнейшее развитие теория получила в работах Д.В. Аносова, В.Ф. Бутузова, А.Б. Васильевой, М.И. Вишика, В.М. Волосова, С.А. Ломова, Л.А. Люстерника, С.А. Кащенко, Н.Н. Моисеева, Б.И. Моргунова, Е.Ф. Мищенко, Р. Е. О'Молли, Н.Х. Розова, Ф. Хауэса, К. Чанга и многих других авторов.

Поток публикаций, посвященных теории и приложениям сингулярно возмущенных систем, непрерывно растет. При этом большое разнообразие задач сочетается со сравнительно небольшим арсеналом применяемых средств анализа. Большинство статей и монографий по указанной тематике имеют в своей основе тот или иной метод построения асимптотических разложений решений начальных или краевых задач. В то же время во многих случаях необходимо следить за поведением всей системы, а не отдельных траекторий, решать задачи качественного исследования системы. Для решения таких проблем представляется целесообразным привлекать не только асимптотические, но и геометрические методы анализа. Геометрический подход является более оправданным и в случае наличия в моделях негладких нелинейностей, которые делают построение асимптотических разложений затруднительным.

Геометрическая теория динамических систем находит свои истоки в работах А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова. Большое распространение получил метод интегральных многообразий, связанный с изучением целых классов решений. Основы теории интегральных многообразий были заложены в работах Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского. Основные результаты по теории интегральных многообразий изложены в фундаментальной монографии Ю.А. Митропольского и О.Б. Лыковой. Для исследования сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений метод интегральных многообразий применялся в работах Я.С. Бариса, К.В. Задираки, Ю.А. Митропольского, Ю.И. Неймарка, В.А. Соболева, В.В. Стрыгина, В.И. Фодчука, Д. Хенри и других авторов.

Важным объектом в моделях с сингулярными возмущениями являются траектории-утки, которые проходят сначала вблизи притягивающей части медленной поверхности модели, а затем продолжают движение в течение некоторого времени вдоль отталкивающей части медленной поверхности. Траектории такого типа применяются для решения задач биологии, механики, химии, экономики и электроники. Исследование траекторий-уток для различных классов систем проводилось в работах В.И. Арнольда, Г.Н. Горелова, Ю.С. Ильяшенко, А.Ю. Колесова, Ю.С. Колесова, Е.Ф. Мищенко, А.Н. Покровского, Н.Х. Розова, В.А. Соболева, Е.А. Щепакиной и др.

В настоящей работе предлагается новый геометрический метод анализа периодических и хаотических траекторий-уток в моделях с сингулярными возмущениями, основанный на теории вращения векторного поля. Данный метод позволяет обойти трудности, связанные с наличием в моделях негладких нелинейностей. В качестве примера изучается электронный генератор шума. Основное внимание уделяется периодическому и хаотическому поведению.

Цель диссертационной работы

Основной целью данной работы является разработка геометрических методов анализа сложного поведения в различных динамических моделях. Для модели электронного осциллятора с гистерезисным элементом доказывается существование бифуркации Андронова–Хопфа и непрерывных ветвей периодических решений. Для модели проникновения осадков в почву доказывается существование и единственность решений и разрабатывается численный алгоритм их построения. Для модели электронного генератора шума с сингулярными возмущениями и негладкими элементами доказываются теоремы о существовании и локализации периодических и хаотических траекторий-уток.

Методы исследования

В работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории гистерезиса, численные методы исследования сложных явлений нелинейной динамики, идеи теории сингулярных возмущений. Алгоритмы для численных расчетов были реализованы с помощью компьютера.

Научная новизна

В представленной диссертационной работе впервые получены следующие результаты.

1. Доказаны новые теоремы о бифуркациях Андронова–Хопфа и существовании непрерывных ветвей циклов в системах операторно-дифференциальных уравнений с оператором Прейсаха под производной. Предложен численный алгоритм построения ветвей циклов для таких

систем. Полученные математические результаты продемонстрированы на примере модели электронного осциллятора с гистерезисной индуктивностью.

2. Доказаны существование и единственность решений дифференциальных уравнений с оператором Прейсаха под производной и разрывной по времени правой частью. Разработан алгоритм численного решения таких уравнений. Алгоритм продемонстрирован на примере модели проникновения осадков в почву.

3. Предложен метод локализации периодического и хаотического поведения траекторий-уток в сингулярно возмущенных системах обыкновенных дифференциальных уравнений с негладкими нелинейностями. Полученные математические результаты продемонстрированы на примере модели электронного генератора шума.

4. Результаты о существовании определенных типов сложного поведения в моделях с сингулярными возмущениями обобщены на случай моделей с числом медленных переменных более двух.

Теоретическая и практическая ценность

Математические результаты диссертации позволяют производить качественное исследование сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с негладкими нелинейностями, а также операторно-дифференциальных уравнений. Разработанные методы локализации сложного поведения могут быть использованы для моделирования и расчета явлений различной природы, так как имеют универсальный характер. Результаты численного исследования моделей гидрологии, рассмотренных в диссертации, имеют практическое значение, так как могут быть использованы для определения динамики процесса проникновения воды в почву в зависимости от интенсивности осадков. Результаты исследования электронных схем могут быть использованы для выбора определенных режимов функционирования этих схем, важных с точки зрения конкретных практических задач.

Апробация работы

Материалы диссертации докладывались на международных конференциях по разнотемповым процессам и гистерезису MURPHYS-2006 (г. Корк, Ирландия, апрель 2006 г.) и MURPHYS-2008 (г. Корк, Ирландия, апрель 2008 г.), международном симпозиуме по гистерезису и микромагнитному моделированию (НММ-07, г. Неаполь, Италия, июнь 2007 г.), на генеральной ассамблее Европейского Геофизического Союза (EGU-2008 General Union, г. Вена, Австрия, апрель 2008 г.), на X международном семинаре им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (г. Москва, июнь 2008 г.).

Результаты обсуждались на научных семинарах кафедры прикладной математики университета г. Корк (Ирландия) и семинарах кафедры прикладной метематики СГОУН.

Публикации

По теме диссертационной работы опубликовано 14 работ, в том числе 6 статей в изданиях из списка ВАК и из международного списка Science Citation Index Expanded, 4 статьи в других международных научных журналах, 2 препринта и 2 тезисов докладов. Из совместных публикаций в диссертацию включены результаты, полученные автором.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, 1 приложения и списка литературы из 115 наименований. Объем диссертации — 123 страницы.

Краткое содержание работы

В **первой главе** приводятся основные факты из теории систем с гистерезисом, теории сингулярных возмущений и теории хаотического поведения. Приводится определение оператора Прейсаха и рассматриваются его основные свойства. Для сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений рассматривается понятие траекторий-уток. Наконец, приводятся основные определения и теоремы, связанные с динамическим хаосом.

Во **второй главе** изучается поведение решений в динамических моделях, состоящих из дифференциального уравнения и гистерезисного входно-выходного соотношения. Сначала рассматривается модель электронного осциллятора ван дер Поля с ферромагнитным сердечником в катушке индуктивности. Электронная схема, реализующая такой осциллятор, состоит из LCR-контура и цикла отрицательной обратной связи, который может быть построен либо на основе триода, как в классической модели, либо туннельного диода. Наличие ферромагнитного сердечника приводит к гистерезисной зависимости между магнитной индукцией B и магнитным полем H, которая моделируется с помощью оператора Прейсаха. Уравнения, описывающие такой осциллятор, имеют вид

$$(x + a\mathcal{P}x)' = y, \quad y' = -k_1 x + k_2 y - k_3 y^3. \tag{1}$$

Особое внимание уделяется случаю $k_3 = 0$, когда правая часть уравнения линейная. Рассмотрим следующее обобщение уравнения (1) с линейной правой частью:

$$(z + c\mathcal{P}x)' = A(\lambda)z, \quad x = \langle b, z\rangle, \quad z \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Здесь с помощью штриха обозначается производная по времени; $\mathcal{P} = \mathcal{P}[t_0, \eta_0]$ — оператор Прейсаха; $A(\lambda)$ — квадратная матрица порядка N, гладко зависящая от скалярного параметра λ; вход $x = x(t)$ нелинейности Прейсаха связан с фазовой переменной $z = z(t)$ при помощи скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $\mathbb{R}^N$. Предполагается, что векторы $b, c \in \mathbb{R}^N$ удовлетворяют соотношению $\langle b, c\rangle > 0$. Каждое начальное условие $z(t_0) = z_0$ и начальное состояние $\eta(t_0) = \eta_0$ нелинейности Прейсаха определяют единственное решение $z(t)$ системы (2), продолжимое на бесконечный промежуток $t > t_0$ и непрерывно зависящее от z_0, η_0. Непрерывное решение $z(t)$ может быть не везде дифференцируемым, но удовлетворяет уравнению везде, то есть функция $z(t) + c\mathcal{P}x(t)$ непрерывно дифференцируема. Заметим, что $z \equiv 0$ является решением системы (2) при каждом значении параметра λ.

Для уравнения (2) получены локальные теоремы о бифуркации Андронова–Хопфа из состояния равновесия и из бесконечности и условия, гарантирующие существование глобальной ветви циклов, соединяющей состояние равновесия и бесконечность. При этом используются следующие слабые определения бифуркаций: λ_0 называется точкой бифуркации Андронова–Хопфа из нулевого положения равновесия (бесконечности), если система имеет сколь угодно малые (большие) циклы при некоторых значениях λ, сколь угодно близких к λ_0.

Теорема 1. *Пусть матрица $A(\lambda)$ имеет пару простых собственных значений $u(\lambda) \pm iv(\lambda)$. Пусть $u(0) = 0$, $u'(0) \neq 0$, $v(0) > 0$, и пусть числа $inv(0)$ не являются собственными значениями матрицы $A(0)$ при $n = 0, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Тогда $\lambda_0 = 0$ — это точка бифуркации Андронова–Хопфа из нулевого положения равновесия системы* (2).

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 точка $\lambda_0 = 0$ бифуркации из положения равновесия — это также точка бифуркации Андронова–Хопфа системы* (2) *из бесконечности.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда найдется такое $\alpha > 0$, что при $0 < \|c\| < \alpha$ система (2) имеет непрерывную ветвь циклов, соединяющую бифуркации Андронова–Хопфа из нулевого положения равновесия и из бесконечности при $\lambda_0 = 0$.*

Доказательство теорем 1 – 3 основано на сведении задачи о циклах системы (2) к задаче о неподвижной точке построенного специальным образом вполне непрерывного оператора $\mathcal{B}$. Существование неподвижной точки у оператора $\mathcal{B}$ устанавливается с помощью теории вращения векторных полей для теорем 1 – 2 и с помощью принципа сжимающих отображений для теоремы 3.

Далее рассматривается гидрологическая модель проникновения осадков в почву. Модель состоит из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с гистерезисной засисимостью между переменными. Как и ранее, гистерезис представлен в виде оператора Прейсаха. Особенностью модели является наличие разрывов по времени в правой части, возникающих в те моменты, когда осадки начинаются или прекращаются, а также при изменении их интенсивности.

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, x(t)) + g(t) = F(t, x(t)), \\ y(t) &= \mathcal{P}[\eta(t)]x(t), \end{aligned} \tag{3}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — вход и выход оператора Прейсаха $\mathcal{P}$ с переменным состоянием $\eta(t)$, функция $f(t, x)$ непрерывно дифференцируема по t и x, а функция $g(t)$ непрерывно дифференцируема, за исключением точек $\mathbb{T} = \{\tau_i\}$, в которых определены и ограничены значения $g(\tau_i - 0)$, $g(\tau_i + 0)$, $g'(\tau_i - 0)$, и $g'(\tau_i + 0)$, но $g(t)$ или $g'(t)$ могут иметь ограниченные разрывы в τ_i. Также предполагается, что любой ограниченный интервал содержит конечное число точек τ_i.

Разрывы по времени в правой части уравнений вида (3) приводят к возникновению локальных сингулярностей. Поэтому в настоящей работе разработаны специальные методы численного построения решений уравнений этого вида, а также доказаны теоремы о существовании и единственности их решений. Кроме того, отдельная теорема описывает поведение решения в окрестности справа от точек τ_i.

Теорема 4. *Пусть для $t_* \in \mathbb{T}$ выполнено неравенство $F(t_* - 0, x_*)F(t_* + 0, x_*) < 0$. Тогда решение $x(t)$ имеет неограниченную правостороннюю производную в точке t_*, и существуют такие $\tilde{\delta} > 0$ и $C > 0$, что при любых $t_* \le t < t_* + \tilde{\delta}$ выполнено неравенство*

$$\left| (x(t) - x_*) - \operatorname{sgn}(F_*)\sqrt{2(t - t_*)\frac{|F_*|}{\mu_*}} \right| \le C(t - t_*), \tag{4}$$

где
$$F_* = F(t_* + 0, x_*), \quad \mu_* = \mu(x_*, x_*), \quad x_* = x(t_*).$$

Также предлагаются явные формулы для оценки констант C и $\tilde{\delta}$.

Теорема 4 была использована для разработки численного алгоритма построения решений задачи (3). Проведен ряд численных экспериментов с использованием данных измерений количества осадков и других гидрологических величин на участке почвы в Керри, Ирландия. Результаты моделирования сравниваются с данными о содержании воды в почве, полученными на том же участке.

Третья глава посвящена геометрическому методу локализации и строгого анализа периодических траекторий-уток и хаотического поведения в моделях с сингулярными возмущениями и кусочно-линейными элементами. Предлагаемый геометрический метод позволяет преодолеть трудности, возникающие при изучении негладких моделей с помощью традиционных методов «chasse au canard». Разработанный подход применим к целому ряду динамических моделей и позволяет установить наличие периодических и хаотических решений, каждое из которых является траекторией-уткой. Метод обеспечивает топологическую устойчивость таких периодических траекторий: они сохраняются, когда рассматриваемая модель подвергается слабым возмущениям. В то же время, эти траектории не обязательно являются устойчивыми по Ляпунову, но стандартные алгоритмы контроля с помощью обратных связей позволяют стабилизировать такие решения.

В качестве примера рассмотрен электронный генератор шума Кияшко–Пиковского–Рабиновича, который представляет собой модификацию генератора ван дер Поля с туннельным диодом, включенным параллельно с индуктивностью. Уравнения, описывающие работу генератора, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\gamma - (y-\alpha)^2)(x+v_1) - r_A(z + v_1 + y - \alpha), \\ \dot{y} &= (x+v_1)/r_A, \\ \varepsilon\dot{z} &= x + |z|, \end{aligned} \tag{5}$$

где ε — малый параметр. Рассмотрим быстро-медленную систему дифференциальных уравнений, обобщающую уравнения модели (5).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y,z), \\ \dot{y} &= g(x,y,z), \\ \varepsilon\dot{z} &= x + |z|. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь x, y, z — скалярные функции времени, ε — малый положительный параметр, и f, g — скалярные функции. Будем обозначать решения этой системы через $w_\varepsilon(t, t_0, x_0, y_0, z_0)$, $w_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)$, где начальные условия заданы в виде $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$.

Подмножество фазового пространства, на котором производная $\dot{z}$ быстрой переменной равна нулю, называется *медленной поверхностью* системы (6). В данном случае медленная поверхность состоит из двух частей: притягивающей полуплоскости P_a и отталкивающей полуплоскости P_r.

$$P_a = \{(x, y, x) \colon x < 0\}, \tag{7}$$
$$P_r = \{(x, y, -x) \colon x < 0\}. \tag{8}$$

Кривая разворота, разделяющая притягивающую и отталкивающую полуплоскости, имеет вид
$$L = \{(0, y, 0)\}. \tag{9}$$

Траектории, проходящие сначала в малой окрестности притягивающей части медленной поверхности и продолжающие движение в течение некоторого времени вдоль ее отталкивающей части, называются *траекториями-утками*. Нас интересует поведение траекторий именно такого типа.

Рассмотрим вспомогательные уравнения, описывающие динамику системы вблизи медленных полуплоскостей (7) и (8) при $\varepsilon \to 0$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_a(x, y) = f(x, y, x), \\ \dot{y} &= g_a(x, y) = g(x, y, x), \end{aligned} \tag{10}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_r(x, y) = f(x, y, -x), \\ \dot{y} &= g_r(x, y) = g(x, y, -x), \end{aligned} \tag{11}$$

Введем обозначения $w_a(t, t_0, x_0, y_0)$ и $w_r(t, t_0, x_0, y_0)$ для решений вспомогательных систем (10) и (11) соответственно, $w_a = (x_a, y_a)$, $w_r = (x_r, y_r)$, с начальными условиями $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$. Через $w_a^*(t)$, $w_a^* = (x_a^*, y_a^*)$ будем обозначать решение системы (10), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y(0) = 0$, а через $w_r^*(t)$, $w_r^* = (x_r^*, y_r^*)$ решение системы (11) с тем же самым начальным условием. Будем предполагать, что система (6) удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1. *Функции f и g из правой части* (6) *ограничены на всем пространстве $\mathbb{R}^3$ и удовлетворяют везде условию Липшица с константой λ.*

$$\begin{gathered} |f(x, y, z)|, |g(x, y, z)| < M, \\ |f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)| \le \lambda(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|). \end{gathered} \tag{12}$$

Условие 2. *Выполнены соотношения*

$$f(0,0,0) = 0, \quad g(0,0,0) > 0, \quad y \cdot f(0,y,0) < 0.$$

Условие 2 обеспечивает существование такого конечного временного интервала $(T_a, T_r) \ni 0$, что

$$x_a^*(t) < 0 \text{ для } T_a < t < 0, \quad x_r^*(t) < 0 \text{ для } 0 < t < T_r.$$

Кроме того, условие 2 ограничивает область возможного пространственного положения траекторий-уток системы (6): такие траектории проходят сперва вблизи притягивающей полуплоскости (7) на интервале $t_a < t < 0$, а затем вдоль отталкивающей полуплоскости (8) при $0 < t < t_r$. Для того, чтобы произошло переключение между этими двумя движениями, такая траектория должна следовать сначала в малой окрестности кривой

$$\Gamma_a = \{(x_a^*(t), y_a^*(t), x_a^*(t))\} \subset P_a \tag{13}$$

при отрицательных значениях времени, а затем в окрестности кривой

$$\Gamma_r = \{(x_r^*(t), y_r^*(t), -x_r^*(t))\} \subset P_r \tag{14}$$

при положительных значениях времени. При этом траектории-утки проходят вблизи начала координат, где кривые Γ_a и Γ_r встречаются при $t = 0$. С помощью стандартных методов легко увидеть, что такие утки существуют на любом временном интервале $[t_a, t_r] \subset (T_a, T_r)$, где $t_a < 0 < t_r$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Для существовании в системе (6) *периодических* уток нужны дополнительные условия. Вышеприведенный аргумент показывает, что периодические траектории-утки должны иметь отрезок быстрого движения из малой окрестности некоторой точки на кривой Γ_r в малую окрестность кривой Γ_a; такое движение, следовательно, почти вертикально (т.е. почти параллельно оси z). Говоря более точным языком, если существует предел периодических траекторий при $\varepsilon \to 0$, то соответствующая предельная кривая с необходимостью имеет вертикальный отрезок, соединяющий кривые Γ_r и Γ_a. Следующее условие обеспечивает возможность таких вертикальных прыжков.

Условие 3. *Траектории $w_a^*(t)$ и $w_r^*(t)$ систем* (10) *и* (11) *пересекаются, то есть существуют числа τ и σ, такие что*

$$x_a^*(\tau) = x_r^*(\sigma) = x^*, \quad y_a^*(\tau) = y_r^*(\sigma) = y^*$$

где

$$T_a < \tau < 0 < \sigma < T_r.$$

Это пересечение должно быть трансверсальным, то есть

$$A = f_a(x^*, y^*)g_r(x^*, y^*) - f_r(x^*, y^*)g_a(x^*, y^*) \neq 0.$$

Следующая теорема устанавливает существование периодической траектории-утки в системе (6) при выполнении условий 1–3.

Теорема 5. *При каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ система (6) имеет периодическое решение. Минимальный период $T_{\min}$ этого решения приближается к $\sigma - \tau$ при $\varepsilon \to 0$.*

Показано, что периодическая утка проходит через малую окрестность точки $(x^*, y^*, 0)$, причем диаметр этой окрестности стремится к нулю при ε стремящемся к нулю.

Метод доказательства теоремы 5 заключается в сведении задачи о нахождении периодических траекторий системы дифференциальных уравнений к задаче о неподвижных точках вспомогательного оператора W, полученного модификацией отображения Пуанкаре системы (6). На специально выбранном множестве Π неподвижные точки этого оператора соответствуют периодическим траекториям-уткам исходной системы. Далее доказывается, что величина $\gamma(I-W, \Pi)$, представляющая из себя вращение векторного поля $I - W$ на множестве Π, отлична от нуля. В соответствии с теорией вращения векторного поля отсюда следует существование особой точки у отображения $I - W$, или что то же самое, существование неподвижной точки у W, из чего вытекает утверждение теоремы.

Для применения теории вращения векторных полей к анализу хаотического поведения траекторий-уток были совмещены схема П. Згличинского и метод топологического отслеживания траекторий. Особо отметим тот факт, что полученные в настоящей работе результаты не требуют проведения части доказательств на компьютере, в отличие от типичных приложений упомянутой выше схемы.

Чтобы траектории-утки вели себя хаотически, они должны иметь несколько участков быстрого движения из малой окрестности некоторой точки кривой Γ_r в малую окрестность кривой Γ_a. Как и у периодических уток, это быстрое движение почти вертикально, то есть почти параллельно оси z. Следующее условие обеспечивает возможность таких вертикальных прыжков.

Условие 4. *Траектории* $w_a^*(t)$ *и* $w_r^*(t)$ *систем* (10) *и* (11) *дважды пересекаются, то есть существуют* τ_1, τ_2, σ_1, σ_2, *такие что*

$$x_a^*(\tau_1) = x_r^*(\sigma_1) = x_1^*, \quad y_a^*(\tau_1) = y_r^*(\sigma_1) = y_1^*,$$
$$x_a^*(\tau_2) = x_r^*(\sigma_2) = x_2^*, \quad y_a^*(\tau_2) = y_r^*(\sigma_2) = y_2^*,$$

причем

$$T_a < \tau_1, \tau_2 < 0 < \sigma_1 < \sigma_2 < T_r.$$

Моменты времени τ_1 *и* τ_2 *могут идти в любом порядке, потребуем только, чтобы* $\tau_1 \neq \tau_2$.

Кроме того, эти пересечения должны быть трансверсальны.

$$A_1 = f_a(x_1^*, y_1^*) g_r(x_1^*, y_1^*) - f_r(x_1^*, y_1^*) g_a(x_1^*, y_1^*) \neq 0,$$
$$A_2 = f_a(x_2^*, y_2^*) g_r(x_2^*, y_2^*) - f_r(x_2^*, y_2^*) g_a(x_2^*, y_2^*) \neq 0.$$

Следующая теорема устанавливает существование хаотического поведения в системе (6) при выполнении условий 1–4.

Теорема 6. *Если* α *достаточно мало, то существуют множества* $\Pi_i \ni (x_i^*, y_i^*)$, $i = 1, 2$, *такие что для каждого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *отображение Пуанкаре* $\mathcal{P}$ *системы* (6) *является* $\{\Pi_1, \Pi_2\}$*-хаотическим.*

Теорема 6 также обобщается на случай, когда количество пересечений кривых $w_a^*(t)$ и $w_r^*(t)$ равно $K \geq 2$. Доказательство теоремы 6 проводится по тому же методу, что и для теоремы 5.

В **четвертой главе** геометрический метод анализа траекторий-уток распространяется на модели с негладкими возмущениями. Роль таких возмущений могут выполнять, например, малые шумы. Рассматриваются системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, y, \varepsilon) + \hat{X}(x, y, z, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y} &= Y(x, y, \varepsilon) + \hat{Y}(x, y, z, \varepsilon), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R}^1,$$

а $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Будем предполагать, что правая часть системы (15) удовлетворяет следующему условию.

Условие 5. *Функция* X *непрерывно дифференцируема,* Y *дважды непрерывно дифференцируема, а функции* $\hat{X}$ *и* $\hat{Y}$ *непрерывны и малы в равномерной норме.*

$$\sup |\hat{X}(x, y, z, \varepsilon)|, \sup |\hat{Y}(x, y, z, \varepsilon)| \ll 1.$$

Таким образом, не предполагается существования каких-либо оценок на производные функций $\hat{X}$ и $\hat{Y}$.

Рассмотрим невозмущенную систему

$$\dot{x} = X(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon\dot{y} = Y(x, y, \varepsilon). \tag{16}$$

Точка (x_c, y_c) называется *критической* для системы (16), если выполнены соотношения

$$\langle X(x_c, y_c, 0), Y_x'(x_c, y_c, 0)\rangle = 0, \tag{17}$$

$$Y(x_c, y_c, 0) = 0, \tag{18}$$

$$Y_y(x_c, y_c, 0) = 0. \tag{19}$$

Это система трех уравнений с тремя неизвестными, поэтому в общем случае естественно ожидать, что у нее имеются решения. Без потери общности можно считать, что критическая точка расположена в начале координат: $x_c = y_c = 0$. Критическая точка называется *невырожденной*, если выполнены следующие неравенства:

$$X(x_c, y_c, 0) \neq 0, \tag{20}$$

$$Y_x'(x_c, y_c, 0) \neq 0, \tag{21}$$

$$Y_{yy}''(x_c, y_c, 0) \neq 0. \tag{22}$$

Будем рассматривать только невырожденные критические точки. Отметим, что невырожденность устойчива по отношению к малым возмущениям правых частей (16).

Для изучения периодических траекторий-уток в полной системе (15) рассмотрим сначала утки, проходящие через малую окрестность невырожденной критической точки невозмущенной системы (16). Следующая вспомогательная система описывает сингулярные пределы решений (16), лежащие на медленной поверхности:

$$\dot{x} = X(x, y, 0), \quad (x, y) \in S_0. \tag{23}$$

Здесь S_0 — медленная поверхность системы (15), причем $(x_0, y_0) \in S_0$. Уравнения (23) также могут быть переписаны в виде

$$\dot{x} = X(x, y, 0), \quad \dot{y}Y_y(x, y, 0) = -\langle X(x, y, 0), Y_x(x, y, 0)\rangle. \tag{24}$$

В силу (19) эта система имеет особенность в начале координат. Поэтому для существования и единственности решения (24), проходящего через начало координат, требуется дополнительное условие. Чтобы его сформулировать, введем сначала систему координат (x_1, x_2, y) в трехмерном пространстве пар (x, y). В этой системе ось x_1 направлена по градиенту $Y'((0,0),0,0)$, а ось x_2 ортогональна x_1 и y. В системе координат (x_1, x_2, y) градиент $Y(x_1, x_2, y, 0)$ в начале координат принимает вид

$$Y'(0,0,0,0) = (\xi, 0, 0), \quad \xi > 0, \tag{25}$$

а система (16) вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_1(x_1, x_2, y, 0), \\ \dot{x}_2 &= X_2(x_1, x_2, y, 0), \\ \dot{y} &= Y(x_1, x_2, y, 0). \end{aligned} \tag{26}$$

Из соотношений (25) и (17) следует, что

$$X_1(0,0,0,0) = 0. \tag{27}$$

Принимая во внимание невырожденность критической точки в начале координат, мы можем обеспечить выполнение неравенств

$$X_2(0,0,0,0) > 0, \qquad Y''_{yy}(0,0,0,0) = \zeta > 0, \tag{28}$$

изменяя, если нужно, направление осей x_2 и y.

Существование уток и единственность решений (24) обеспечивает следующее условие.

Условие 6.

$$2X_1{}'_{x_2}(0,0,0,0)Y''_{yy}(0,0,0,0) - X_1{}'_y(0,0,0,0)Y''_{x_2 y}(0,0,0,0) < 0, \tag{29}$$

$$X_1{}'_y(0,0,0,0) > 0. \tag{30}$$

Как и в главе 3, существуют жесткие ограничения на возможное месторасположение траекторий-уток системы (16), проходящих вблизи начала координат: такие утки должны лежать в малой окрестности кривой $w^*(t)$ на протяжении определенного интервала $t_a < 0 < t_r$. Если же утка является периодической, то у нее должен быть интервал быстрого движения из малой окрестности некоторой точки отталкивающей части кривой $w^*(t)$ до малой окрестности притягивающей части кривой $w^*(t)$. Это быстрое движение почти вертикально (то есть почти параллельно оси y). Если существует предел периодических уток при $\varepsilon \to 0$, то предельная замкнутая кривая обязана содержать вертикальный отрезок, соединяющий притягивающую и отталкивающую части кривой $w^*(t)$. Следующее условие обеспечивает существование участков быстрого вертикального движения.

Условие 7. *Двумерные кривые* Γ_a *и* Γ_r*, заданные формулами*

$$\Gamma_a = \{x^*(t)\colon T_a < t < 0\}, \quad \Gamma_r = \{x^*(t)\colon 0 < t < T_r\},$$

пересекаются, то есть существуют такие τ *и* σ*, что*

$$x^*(\tau) = x^*(\sigma) = x^*, \qquad T_a < \tau < 0 < \sigma < T_r.$$

Без ограничения общности можно считать, что $y^*(\tau) < y^*(\sigma)$*. Потребуем также, чтобы*

$$Y(x^*, y) < 0, \quad y^*(\tau) < y < y^*(\sigma).$$

Кроме того, это пересечение должно быть трансверсально, а именно, вектора $\dot{x}^*(\tau)$ *и* $\dot{x}^*(\sigma)$ *должны быть линейно независимы. Чтобы упростить рассуждения, дополнительно предположим, что кривые* Γ_a *и* Γ_r *не имеют самопересечений.*

Теперь можно сформулировать теорему о существовании периодических уток в системах (16) и (15).

Теорема 7. *Пусть выполнены условия 5–7. Тогда существуют* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\lambda > 0$*, такие что для любых* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *и любых* $\hat{X}, \hat{Y}$*, удовлетворяющих*

$$\sup |\hat{X}(x, y, z, \varepsilon)|, \sup |\hat{Y}(x, y, z, \varepsilon)| < \lambda, \tag{31}$$

система (15) *имеет периодическое решение-утку, которое проходит через окрестность* $B_\alpha(x^*, y^*)$*, где* $\alpha \to 0$ *при* $\varepsilon_0, \lambda \to 0$*. Минимальный период* $T_{\min}$ *этого решения стремится к* $\sigma - \tau$ *при* $\varepsilon_0, \lambda \to 0$*.*

Предположим теперь, что существует $K \geq 2$ трансверсальных пересечений (x_i^*, y_i^*) кривых Γ_a и Γ_r. Тогда справедлива теорема о существовании хаотических траекторий-уток.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия 5–7 с* $K \geq 2$ *пересечениями. Тогда существует семейство попарно непересекающихся множеств* $\Pi_i \ni x^*(\tau_i)$*,* $\varepsilon_0 > 0$ *и число* $\lambda > 0$*, такие что при любых* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *и любых* $\hat{X}, \hat{Y}$*, удовлетворяющих*

$$\sup |\hat{X}(x, y, z, \varepsilon)|, \sup |\hat{Y}(x, y, z, \varepsilon)| < \lambda,$$

отображение Пуанкаре $\mathcal{P}\colon \bigcup_i \Pi_i \to \mathbb{R}^2$ *системы* (15) *является* $\{\Pi_i\}$*-хаотичным.*

Наконец, рассматривается обобщение на случай динамических моделей с более чем тремя переменными, когда влияние остальных переменных на трехмерную подмодель слабо. Рассматривается система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x,y,\varepsilon) + \hat{X}(x,y,z,\varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= Y(x,y,\varepsilon) + \hat{Y}(x,y,z,\varepsilon), \\ \dot{z} &= Z(x,y,z,\varepsilon). \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь

$$x \in \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R}^1, \quad z \in \mathbb{R}^d,$$

а $\varepsilon > 0$ — это малый параметр. Возмущения $\hat{X}(x,y,z,\varepsilon)$ и $\hat{Y}(x,y,z,\varepsilon)$ предполагаются малыми по равномерной норме.

$$\sup|\hat{X}(x,y,z,\varepsilon)|, \sup|\hat{Y}(x,y,z,\varepsilon)| \ll 1.$$

Как и ранее, никаких ограничений на производные этих возмущений не накладывается.

Показывается, что при выполнении определенных условий система (32) имеет периодическую траекторию-утку, если такая траектория имеется у невозмущенной системы (16). Также приводится результат о существовании у системы (32) хаотических траекторий-уток.

В **приложении** приведены листинги программ для построения ветвей циклов системы (1) и для решения уравнений типа (3).

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доц. Е.А. Щепакиной, а также проф. А.В. Покровскому, проф. В.А. Соболеву и Д.И. Рачинскому за ценные замечания, плодотворное обсуждение задач и результатов, неоценимое внимание и постоянную поддержку.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в ведущих журналах, рекомендованных ВАК

1. Жежерун А.А. Бифуркация Андронова–Хопфа в системах с оператором Прейсаха. / Жежерун А.А., Кузнецов Н.А., Рачинский Д.И. // Доклады Академии Наук. – 2008. – Т. 422, № 3. – С. 302–306.

2. Appelbe B. Rate-Independent hysteresis in terrestrial hydrology: A vegetated soil model with Preisach hysteresis. / Appelbe B., Flynn D.,

McNamara H., O'Kane P., Pimenov A., Pokrovskii A., Rachinskii D., Zhezherun A. // IEEE Control Systems Magazine. – 2009. – Vol. 29. – P. 44-69.

3. Pokrovskii A. Topological degree in analysis of chaotic behavior in singularly perturbed systems. / Pokrovskii A., Zhezherun A. // Chaos. – 2008. – Vol. 18. – P. 023130-1–12.

4. Appelbe B. Hopf bifurcation in a van der Pol type oscillator with magnetic hysteresis. / Appelbe B., Rachinskii D., Zhezherun A. // Physica B: Cond. Matter. – 2008. – Vol. 403. – P. 301–304.

5. Flynn D. Modeling discontinuous flow through porous media using ODEs with Preisach operator. / Flynn D., Zhezherun A., Pokrovskii A., O'Kane J. P. // Physica B: Cond. Matter. – 2008. – Vol. 403. – P. 440–442.

6. O'Ceallaigh S. Algorithm for linear stability analysis in systems with Preisach hysteresis. / O'Ceallaigh S., Pimenov A., Pokrovskii A., Rachinskii D., Zhezherun A. // Physica B: Cond. Matter. – 2008. – Vol. 403. – P. 305–307.

Другие публикации

7. Щепакина Е.А. Смена устойчивости в кусочно-линейных системах с быстрыми и медленными переменными. / Щепакина Е.А., Жежерун А.А. // Тезисы докладов X международного семинара им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». – Москва, 3–6 июня 2008 г. – С. 368–370.

8. Жежерун А.А. Хаотическое поведение в кусочно-линейных системах. / Жежерун А.А. // Тезисы докладов международного семинара «Нелинейное моделирование и управление». – Самара, 22–25 июня 2004 г. – 1с.

9. Zhezherun A. Numerical simulations of hysteretic discontinuous flow through porous media. [Online preprint] / Zhezherun A. – Preprints of SMAMS. – 2009. – 6 p. – URL: `http://euclid.ucc.ie/appliedmath/preprints/SMAMS_01_09.pdf`.

10. Pokrovskii A. V. Topological methods in analysis of periodic and chaotic canard-type trajectories. [Online preprint] / Pokrovskii A.V., Pokrovskiy A.A., Zhezherun A. – arXiv:0805.0368v1 [math.DS]. – 2008. – 41 p. – URL: `http://arxiv.org/abs/0805.0368v1`.

11. Flynn D. Numerical solution of ODEs involving the derivative of a Preisach operator and with discontinuous RHS. / Flynn D., O'Kane J. P., Zhezherun A. // J. Phys.: Conf. Ser. – 2006 – Vol. 55. – P. 63–73.

12. Pokrovskii A. Differentiability of evolution operators for dynamical systems with hysteresis. / Pokrovskii A., Power T., Rachinskii D., Zhezherun A. // J. Phys.: Conf. Ser. – 2006. – Vol. 55. – P. 171–190.

13. Zhezherun A. ODEs with Preisach operator under the derivative and with discontinuous in time right-hand side. / Zhezherun A., Flynn D. // J. Phys.: Conf. Ser. – 2006. – Vol. 55. – P. 232–242.

14. Zhezherun A. Chaotic behavior in piecewise-linear Linz–Sprott equations. / Zhezherun A. // J. Phys.: Conf. Series. – 2005. – Vol. 22. – P. 235–253.

Подписано в печать 10.04.09. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ № 293.

Отпечатано в типографии СамГТУ.
443110, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.