На правах рукописи

Голодова Елена Сергеевна

ДИНАМИКА КРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ С ЗАТЯГИВАНИЕМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

Ярославль — 2009

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета

Научный руководитель —	доктор физико-математических наук, доцент Щепакина Елена Анатольевна
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Асташова Ирина Викторовна
	доктор физико-математических наук, профессор Кубышкин Евгений Павлович
Ведущая организация —	Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится «4» декабря 2009 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 в Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан «22» октября 2009 г. 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Настоящая работа связана с особенностями протекания критических режимов в химических системах. В последнее время существенно возрос интерес к критическим и околокритическим режимам. Применение таких режимов находит все более широкое распространение не только в химической промышленности, но и в многих других областях, например, связанных с лазерами и реактивными двигателями. Причиной критических явлений в системах является проявление потенциальной неустойчивости, имеющейся в системе при изменении параметров. Как правило, в математических моделях таких процессов наблюдается явление затягивания потери устойчивости. При этом вопрос оценки величины этого затягивания часто остается открытым, что делает особо актуальным развитие соответствующего математического аппарата с последующим его применением к конкретным динамическим моделям. Именно этому посвящена диссертационная работа.

В данной работе исследуются динамические модели, которые описываются сингулярно возмущенными системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения используются для моделирования процессов различной природы. Так, в моделях химической кинетики наличие малого параметра связано с тем, что в химической системе одновременно происходят резко отличающиеся по скорости процессы. Для задач теории горения является характерной высокая скорость тепловыделения при сравнительно низкой скорости расходования горящего вещества. Это различие носит настолько резкий характер для газофазных систем, что явление самовоспламенения приобрело название теплового взрыва.

Обычное предположение теории сингулярных возмущений основано на том, что основной функциональный определитель быстрой подсистемы отличен от нуля. Однако во многих прикладных задачах, в частности в моделях химических систем, это условие нарушается, и возникают критические ситуации. Нарушение этого условия может привести к возникновению эффекта затягивания потери устойчивости.

Один из сценариев затягивания потери устойчивости в сингулярно возмущенных системах связан с траекториями–утками. Если первоначально термин “утка” употреблялся применительно к предельным циклам уравнений типа уравнения Ван–дер–Поля (так называемые циклы–утки), то позднее речь идет об объектах более общей природы — о траекториях–утках, как одномерных устойчиво–неустойчивых медленных интегральных многообразиях.

Основная задача математической теории теплового взрыва заключается в исследовании динамики процесса горения при заданных размерах реакционного сосуда, теплофизических и кинетических характеристиках реагирующего вещества, коэффициенте теплоотдачи.

Для классической модели теплового взрыва эти характеристики отражает некоторый параметр, значение которого определяется начальным состоянием химической системы. В зависимости от значения этого параметра происходит либо переход реакции к медленному режиму, что ведет к затуханию реакции, либо реакция переходит в режим самоускорения, что приводит к взрыву. Численные расчеты для сосредоточенной двумерной модели показывают, что переход от медленного режима к взрывному происходит в чрезвычайно узком промежутке изменения параметра, характеризующего начальное состояние системы. При некотором значении этого параметра, которое называется критическим, реакция идет максимально долго, не срываясь в режим взрыва и не переходя в медленный режим выгорания. Соответствующий режим будем называть критическим. При этом часто возникает вопрос о возможности управлять температурами, достигаемыми во время критического режима.

В данной работе разработан математический аппарат для исследования динамических моделей с сингулярными возмущениями, в которых может наблюдаться явление затягивания потери устойчивости, позволяющий оценить величину этого затягивания. Установлена связь между явлением затягивания потери устойчивости в сингулярно возмущенной системе дифференциальных уравнений и оценкой максимальной температуры горения для моделей горения и теплового взрыва. Получена зависимость максимальной температуры безопасного горения от начальных данных.

Цель работы

Разработка математического аппарата для оценки величин затягивания потери устойчивости в сингулярно возмущенных динамических моделях, в которых наблюдается явление смены устойчивости медленных режимов, и применение полученных результатов для исследования математических моделей теории горения и теплового взрыва.

Методы исследования

В работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, идеи теории сингулярных возмущений и интегральных многообразий, численные методы исследования сложных явлений нелинейной динамики.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми.

Разработан математический аппарат, позволяющий оценивать величину затягивания потери устойчивости в динамических моделях, в которых наблюдается смена устойчивости медленных движений. Получена оценка величины затягивания потери устойчивости для динамических моделей теории горения и теплового взрыва.

Проведено численно–аналитическое исследование модели фильтрационного горения и модели самовоспламенения изоляции. Изучена динамика химических процессов, описаны основные режимы химических реакций, найдены условия протекания критического режима. Получена оценка величины затягивания потери устойчивости. Установлена связь между явлением затягивания потери устойчивости в сингулярно возмущенной системе дифференциальных уравнений и оценкой максимальной температуры безопасного горения. Описаны критические явления в задаче о бегущих волнах горения.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет и теоретическое, и практическое значение.

Полученная в диссертации теорема о затягивании потери устойчивости в сингулярно возмущенной системе дифференциальных уравнений может быть использована при анализе динамических моделей с быстрыми и медленными переменными, в которых наблюдается явление смены устойчивости медленных движений. Разработанный в диссертации метод оценки величины затягивания потери устойчивости может быть использован для исследования критических явлений различной природы, так как имеет универсальный характер.

Результаты численно–аналитического исследования моделей химических систем, в которых наблюдается явление затягивания потери устойчивости, имеют важное практическое значение, так как могут быть использованы для определения динамики процесса в химических системах при заданных начальных условиях. Полученные оценки максимальной температуры безопасного горения в рассмотренных моделях обеспечивают безопасность протекания химических реакций, а так же позволяют повысить эффективность самого технологического процесса.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на Международном семинаре "Нелинейное моделирование и управление" (г. Самара, 2005), Международной молодежной научной конференции "XXXI Гагаринские чтения" (Москва, 2006), Международной конференции "Тихонов и современная математика" (Москва, 2006), Всероссийской конференции "Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе" (Москва, 2006), Международном семинаре по релаксационным колебаниям и гистерезису (г. Корк, Ирландия, 2006), Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной памяти И.Г. Петровского (г. Москва, 2007), Международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования" (Воронеж, 2009). Результаты были представлены на VII, VIII и IX Всероссийских симпозиумах по прикладной и промышленной математике (Йошкар – Ола, 2006, Сочи, 2007, Кисловодск, 2008), семинаре Ярославского государственного университета (г. Ярославль, 2009), семинаре по асимптотическим методам кафедры математики физического факультета МГУ (г. Москва, 2009, руководители семинара проф. В.Ф. Бутузов, проф. А.Б. Васильева и проф. Н.Н. Нефедов), семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры математики МЭСИ (г. Москва, 2009, руководитель семинара проф. И.В. Асташова).

Диссертационная работа содержит результаты, полученные в ходе выполнения научных исследований в рамках гранта РФФИ 07-01-00169а.

Публикации

По теме диссертационной работы опубликовано 11 работ, том числе 4 в изданиях из списка ВАК, 1 в международном журнале и 6 в сборниках тезисов российских и международных конференций. Из совместных публикаций в диссертацию включены результаты, полученные автором.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав, содержащих 12 параграфов и 61 рисунок, заключения, списка литературы, включающего 142 наименования. Объем диссертации – 124 страницы.

Краткое содержание работы

Во **Введении** обосновывается актуальность выбранной темы, излагаются цели и задачи исследования, дается общая характеристика работы и краткий обзор литературы, связанной с тематикой диссертации.

В **первой главе** приводятся необходимые сведения из теории траекторий–уток и интегральных многообразий. Разработан математический аппарат для исследования динамических моделей с сингулярными возмущениями, в которых наблюдается явление затягивания потери устойчивости, позволяющий оценить величину это затягивания.

В первом параграфе приведены основные понятия и определения теории интегральных многообразий. Сформулированы теоремы существования и асимптотических свойств интегральных многообразий.

Во втором параграфе рассмотрены системы, в которых при изменении значения дополнительного параметра положение равновесия быстрой подсистемы теряет устойчивость с прохождением одного или пары собственных значений через мнимую ось. Явление затягивания состоит в том, что фактический уход фазовой точки от потерявшего устойчивость положения равновесия происходит не сразу после потери устойчивости, а спустя некоторое время. Рассмотрены два сценария затягивания потери устойчивости. В первом из них происходит переход пары комплексных характеристических корней линеаризованной матрицы быстрой подсистемы из левой комплексной полуплоскости в правую. Второй сценарий наблюдается в системах, зависящих от дополнительного параметра. Изменение этого величины параметра влечет переход одного вещественного характеристического корня из левой комплексной полуплоскости в правую, при этом могут возникнуть траектории–утки.

В третьем параграфе описан случай возникновения траекторий–уток в сингулярно возмущенных системах дифференциальных уравнений. Напомним, что траектория сингулярно возмущенной системы называется траекторией–уткой, если она проходит непрерывным образом вдоль медленной кривой вначале вдоль устойчивого участка, а затем вдоль неустойчивого участка, причем оба раза проходятся расстояния длины порядка единицы.

Четвертый параграф посвящен вопросу об оценке величины затягивания потери устойчивости на примере сингулярно возмущенной двумерной дифференциальной системы, когда затягивание потери устойчивости протекает по “уточному” сценарию.

Рассмотрим автономную сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon\dot{y} = p(x, y, \alpha, \varepsilon), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{2}$$

Здесь x, y — скалярные функции времени; ε — малый положительный параметр, такой что $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$; $\alpha \in \mathbb{R}$ — дополнительный параметр.

Введем ряд условий.

(H_1). Пусть f и p — достаточно гладкие функции в некоторой области $\Delta := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d\right\}$, (x_0, y_0) — внутренняя точка области Δ.

(H_2). Пусть при некотором значении параметра $\alpha = \alpha_0$ медленная кривая S_{α_0} системы (1), описываемая уравнением

$$p(x, y, \alpha, 0) = 0, \tag{3}$$

имеет точку самопересечения $(x_c, y_c) \in \Delta$, т.е. выполняются условия

$$p(x_c, y_c, \alpha_0, 0) = p_x(x_c, y_c, \alpha_0, 0) = p_y(x_c, y_c, \alpha_0, 0) = 0. \tag{4}$$

При этом точка (x_c, y_c) делит S_{α_0} на устойчивые $\left(S^{s,1}_{\alpha_0}, S^{s,2}_{\alpha_0}\right)$ и неустойчивые $\left(S^{u,1}_{\alpha_0}, S^{u,2}_{\alpha_0}\right)$ части, где

$$
\begin{aligned}
S^{s,1}_{\alpha_0} &:= \{(x,y) \in \Delta : y = \psi^s_1(x), a \le x \le x_c\},\\
S^{s,2}_{\alpha_0} &:= \{(x,y) \in \Delta : y = \psi^s_2(x), x_c \le x \le b\},\\
S^{u,1}_{\alpha_0} &:= \{(x,y) \in \Delta : y = \psi^u_1(x), a \le x \le x_c\},\\
S^{u,2}_{\alpha_0} &:= \{(x,y) \in \Delta : y = \psi^u_2(x), x_c \le x \le b\}.
\end{aligned}
$$

Здесь $\psi^s_i(x)$, $\psi^u_i(x)$ $(i = 1, 2)$ являются корнями вырожденного уравнения (3) на соответствующих промежутках, и

$$
\frac{\partial p}{\partial y}(x, \psi^s_1, \alpha_0, 0) < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x, \psi^u_1, \alpha_0, 0) > 0, \quad a \le x < x_c,
$$

$$
\frac{\partial p}{\partial y}(x, \psi^s_2, \alpha_0, 0) < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x, \psi^u_2, \alpha_0, 0) > 0, \quad x_c < x \le b.
$$

(H_3). Пусть система (1) для некоторого значения параметра

$$
\alpha = \alpha^* = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + O(\varepsilon^2)
$$

имеет решение–утку $y = \phi(x, \varepsilon)$, где

$$
\phi(x, 0) = \begin{cases} \psi^s_1(x), & a \le x \le x_c, \\ \psi^u_2(x), & x_c \le x \le b. \end{cases} \tag{5}
$$

(H_4). Рассмотрим начальную задачу (1), (2), где точка (x_0, y_0) принадлежит области влияния устойчивого корня $\psi^s_1(x)$:

$$
a \le x_0 < x_c, \quad c \le y_0 \le \psi^s_1(x_0).
$$

(H_5). Потребуем, чтобы в области Δ

$$
f(x, y, 0) \ne 0. \tag{6}
$$

Из системы (1) при $\alpha = \alpha^*$ имеем

$$
\varepsilon \frac{dy}{dx} = \frac{p(x, y, \alpha^*, \varepsilon)}{f(x, y, \varepsilon)}. \tag{7}
$$

Введя замену переменных

$$
y = \phi(x, \varepsilon) + u, \tag{8}
$$

где $\phi(x, \varepsilon)$ описывает траекторию–утку системы (1) и сделав ряд преобразований, получим

$$
\varepsilon \frac{du}{dx} = \frac{p(x, \phi(x,\varepsilon) + u, \alpha^*, \varepsilon)}{f(x, \phi(x,\varepsilon) + u, \varepsilon)} - \frac{p(x, \phi(x,\varepsilon), \alpha^*, \varepsilon)}{f(x, \phi(x,\varepsilon), \varepsilon)} \equiv g(u, x, \varepsilon). \tag{9}
$$

Рассмотрим функцию

$$G(x, x_0, \varepsilon) := \int_{x_0}^{x} g_u(0, s, \varepsilon) ds.$$

(H_6). Пусть уравнение

$$G(x, x_0, 0) = 0 \tag{10}$$

имеет корень $x^* \in (x_0, b)$.

(H_7). Существуют достаточно малые положительные числа c_0 и ε_0, такие что $[-c_0, c_0] \in (c, d)$ и

$$\frac{p(x, \phi(x, 0) + u, \alpha_0, 0)}{f(x, \phi(x, 0) + u, 0)} \geq \frac{p_y(x, \phi(x, 0), \alpha_0, 0)}{f(x, \phi(x, 0), 0)} u$$

для $x_0 \leq x \leq x^*,\ \varepsilon \in \overline{I}_{\varepsilon_0},\ -c_0 \leq u \leq 0$.

Для $\alpha = \alpha^*$ начальная задача (1), (2) имеет решение–утку, траектория которого, выходя из начальной точки (x_0, y_0), притягивается к устойчивой части $S^{s,1}_{\alpha_0}$, следует вдоль неё до точки (x_c, y_c) и продолжает движение вдоль неустойчивой части $S^{u,2}_{\alpha_0}$ до точки с $x = x^*$. В этой точке y достигает своего максимального значения y^{ε}_{max} на траектории–утке. Затем траектория отрывается от неустойчивой части $S^{u,2}_{\alpha_0}$ и притягивается к устойчивой части $S^{s,2}_{\alpha_0}$ медленной кривой S_{α_0}.

Была поставлена задача для $\alpha = \alpha^*$ и достаточно малых ε определить точку отрыва $(x^*, y^{\varepsilon}_{max})$ траектории–утки начальной задачи (1), (2).

При выполнении условий (H_1)–(H_7) начальная задача (1), (2) удовлетворяет условия теоремы о затягивания потери устойчивости в скалярных неавтономных дифференциальных уравнениях. [1]

Тогда имеет место следующая

Теорема 6. Пусть выполняются условия (H_1)–(H_7). Тогда для начальной задачи (1), (2) при $\alpha = \alpha^*$ и достаточно малых ε имеет место соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y^{\varepsilon}_{max} = y^*, \quad y^* = \phi(x^*, 0).$$

Во **второй главе** исследуется вопрос оценки величин затягивания потери устойчивости в математических моделях автокаталитического горения. Данная глава содержит приложение полученного в первой главе диссертации математического результата к исследованию классической модели и модели фильтрационного горения горючей газовой смеси в случае автокаталитической реакции.

---

[1] Nefedov N. N. On immediate–delayed exchange of stabilities and periodic forced canards./Nefedov N. N., Schneider K. R.// Журнал вычислительной математики и матем. физики. – 2008. – Т. 48, № 1. – С. 46–61.

В параграфе 2.1 рассматривается классическая модель автокаталитического горения в гомогенной среде. В безразмерных координатах модель горения имеет вид

$$\gamma\frac{d\theta}{d\tau}=\eta(1-\eta)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right)-\alpha\theta, \tag{11}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau}=\eta(1-\eta)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right), \tag{12}$$

$$\eta(0)=\tilde{\eta_0}/(1+\tilde{\eta_0})=\eta_0, \theta(0)=0. \tag{13}$$

Здесь η — глубина превращения, $\tilde{\eta_0}$ — критерий автокаталитичности (отношение начальной скорости реакции к автокаталитической константе). Отметим, что для типичных газовых смесей параметры β и γ малы. Следовательно система (11), (12) являются сингулярно возмущенной.

Для системы (11), (12) описаны основные режимы, наблюдающиеся в химической системе: медленный режим с низкими температурами, опасный режим теплового взрыва и критический режим. Найдены условия протекания критического режима, разделяющего режимы медленного выгорания и режимы теплового взрыва. Следует отметить, что критический режим не является медленным, так как во время него разогрев химической системы достигает значений, существенно превышающих значения, характерные для режимов медленного горения. С другой стороны, критический режим не является взрывным, так как во время него температура растет со скоростью медленной переменной, т. е. порядка $O(1)$ (при тепловом взрыве температура растет со скоростью быстрой переменной, т.е. порядка $O(\varepsilon^{-1}),\ \varepsilon\to 0$). Таким образом, важным является следующий факт: во время критического режима температура достигает высоких значений в рамках безопасного режима, и это может быть целью технологического процесса. Критический режим моделируется траекторией–уткой, и, с математической точки зрения, максимальная температура безопасного горения соответствует точке, в которой траектория–утка отрывается от медленной кривой.

Ясно, что для каждого конкретного процесса значения максимальной безопасной температуры является разными (это определяется, прежде всего, характеристиками реактора). Поэтому, важно понять, как можно управлять процессом достижения максимальных температур во время критического режима. С геометрической точки зрения, необходимо определить координату точки отрыва траектории–утки от медленной кривой. Для этих целей воспользуемся Теоремой 6. При этом уравнение (9) для случая $\beta=0$ (отличия результатов, полученных для случая $\beta\neq 0$, от случая $\beta=0$, несущественны) принимает вид

$$\gamma \frac{du}{d\eta} = \frac{\alpha^*}{\eta(1-\eta)e^{\bar{\varphi}(\eta,\gamma)}}\Big(\frac{\bar{\varphi}(\eta,\gamma)(e^u-1)-u}{e^u}\Big) \equiv g(u,\eta,\gamma), \tag{14}$$

где функция $\bar{\varphi}(\eta,\gamma)$ описывает самую длинную траекторию–утку и

$$\bar{\varphi}(\eta,0) = \begin{cases} \zeta_1^s(\theta) = 0.5(1-\sqrt{1-\theta e^{1-\theta}}), & 0 \le \theta \le 1, \\ \zeta_2^u(\theta) = 0.5(1+\sqrt{1-\theta e^{1-\theta}}), & \theta \ge 1. \end{cases}$$

Отметим, что для уравнения (14) выполняются все предположения Теоремы 6 для $0 < \eta \le \eta^*$. Тогда

$$G(\eta,\eta_0,0) = \int_{\eta_0}^{0.5} \Big(1-(\psi_1^s)^{-1}(s)\Big)\,ds + \int_{0.5}^{\eta} \Big(1-(\psi_2^u)^{-1}(s)\Big)\,ds =$$

$$= \int_{\theta_0}^{1} (1-\sigma^{-1})(\zeta_1^s)'(\sigma)d\sigma + \int_{1}^{\theta^*} (1-\sigma^{-1})(\zeta_2^u)'(\sigma)d\sigma := \tilde{G}(\theta,\theta_0,0). \tag{15}$$

Здесь функции ζ_1^s, ζ_2^u описывают устойчиво–неустойчивую часть медленной кривой системы (11), (12) вдоль которой движется траектория–утка, а ψ_1^s, ψ_2^u — обратные к ним функции. Из (15) видно, что максимальная температура θ^* зависит от начальной температуры горючего газа θ_0. Таким образом, решая уравнение

$$\tilde{G}(\theta,\theta_0,0) = 0,$$

получим зависимость максимальной температуры безопасного горения от начальных данных для классической модели. Справедливо следующее

Утверждение 1. *Максимальная температура безопасного горения для модели (11), (12) при достаточно малых ε — это максимальная температура θ_{max}^{γ} на траектории-утке, выходящей из начальной точки* $(\eta = \eta_0, \theta = 0)$, *где* $0 < \eta_0 < 1$, *удовлетворяющая соотношению*

$$\lim_{\gamma\to 0} \theta_{max}^{\gamma} = \theta^*(\theta_0),$$

где θ_0 находится из уравнения медленной кривой системы (11), (12) при $\eta = \eta_0$.

Таким образом, установлена связь между явлением затягивания потери устойчивости и максимальной температурой безопасного горения. Найдена зависимость максимальной температуры безопасного горения от начальных данных.

В параграфе 2.2 рассмотрена макрокинетическая модель воспламенения газовой смеси в инертной запыленной или пористой среде. Использование инертной среды для снятия тепла, выделяемого в результате реакции горения, и его дальнейшего использования, является основой многих технологических процессов.

Обычным предположением математической теории горения является однородность распределения температуры и межфазного теплообмена. Сильная экзотермичность и большая энергия активации процесса определяют существование малого параметра при производной безразмерной температуры газа и существование областей неустойчивости. Модель в безразмерных переменных имеет вид

$$\gamma \frac{d\theta}{d\tau} = \eta(1-\eta)\exp\left(\theta/\left(1+\beta\theta\right)\right) - \alpha(\theta-\theta_c), \tag{16}$$

$$\gamma_c \frac{d\theta_c}{d\tau} = \alpha(\theta-\theta_c), \tag{17}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \eta(1-\eta)\exp\left(\theta/\left(1+\beta\theta\right)\right), \tag{18}$$

с начальными условиями

$$\eta(0) = \tilde{\eta}_0/\left(1+\tilde{\eta}_0\right) = \eta_0,\ \ \theta(0) = \theta_c(0) = 0.$$

Здесь θ, θ_c — безразмерная температура газа и инертной среды, соответственно; η — безразмерная глубина превращения газа; $\tilde{\eta}_0$ — критерий автокаталитичности; τ — безразмерное время. Параметры β и γ характеризуют температурную чувствительность и экзотермичность реакции и для типичных газовых смесей являются малыми. Слагаемое $-\alpha(\theta-\theta_c)$ отражает межфазный теплообмен. Параметр γ_c отражает физические свойства инертной среды и равен обратной величине максимальной адиабатической температуры инертной фазы, если все тепло реакции идет на ее нагрев. В зависимости от соотношений между параметрами α и γ_c в химической системе может наблюдаться либо режим медленного горения, либо режим теплового взрыва, характеризующийся прогрессивным повышением температуры реагента. Таким образом, меняя значение одного параметра при фиксированном значении другого, можно выбирать тип химической реакции. В силу непрерывной зависимости системы (16)–(18) от параметров, между режимами медленного выгорания и режимами теплового взрыва должна существовать область переходных режимов.

Для системы (16)–(18) выделены основные типы реакций, определены условия протекания критического режима, разделяющего области медленных и взрывных режимов, исследован вопрос об оценке максимальной температуры безопасного горения. Для оценки максимальной температуры на траектории–утке уравнения

$$\gamma\frac{d\theta}{d\eta}=\frac{\eta(1-\eta)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right)-\alpha^*\left(1+\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)\theta+\frac{\alpha^*}{\gamma_c}(\eta-\eta_0),}{\eta(1-\eta)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right)},\tag{19}$$

которое следует из (16)–(18) при критическом значении $\alpha=\alpha^*$, введем новую переменную выражением

$$\theta=\varphi(\eta,\eta_0,\gamma)+u,\tag{20}$$

где функция $\varphi(\eta,\eta_0,\gamma)$ описывает траекторию–утку на участке медленного движения и

$$\varphi(\eta,\eta_0,0)=\begin{cases}\zeta_1^s(\theta)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_0}{\gamma_c}\exp\left(\frac{-\theta}{1+\beta\theta}\right)-D\right), & 0\le\theta\le\tilde{\theta}_c,\\ \zeta_2^u(\theta)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_0}{\gamma_c}\exp\left(\frac{-\theta}{1+\beta\theta}\right)+D\right), & \theta\ge\tilde{\theta}_c,\end{cases}$$

$$D=\sqrt{\left(1+\frac{\alpha_0}{\gamma_c}\exp\left(\frac{-\theta}{1+\beta\theta}\right)\right)^2-4\alpha_0\exp\left(\frac{-\theta}{1+\beta\theta}\right)\left(\theta+\frac{\eta_0}{\gamma_c}\right)}.$$

Сделав ряд преобразований, получим

$$\gamma\frac{du}{d\eta}=\frac{\alpha^*}{\eta(1-\eta)}\left(\left[\left(1+\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)\varphi-\frac{\eta-\eta_0}{\gamma_c}\right]\exp\left(\frac{-\varphi}{1+\beta\varphi}\right)-\right.$$

$$\left.-\left[\left(1+\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)(\varphi+u)-\frac{\eta-\eta_0}{\gamma_c}\right]\exp\left(\frac{-\varphi-u}{1+\beta\varphi+\beta u}\right)\right)\equiv g(u,\eta,\gamma).\tag{21}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $g(u,\eta,\gamma)$ удовлетворяет условиям Теоремы 6 при подходящем выборе η_0 и для достаточно малого γ. Тогда

$$G(\eta,\eta_0,0)=\int\limits_{\eta_0}^{\tilde{\eta}_c}\left(\frac{1}{(1+\beta\psi_1^s(\xi))^2}-\frac{1}{\psi_1^s(\xi)-\frac{\xi-\eta_0}{\gamma_c}}\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_{\tilde{\eta}_c}^{\eta}\left(\frac{1}{(1+\beta\psi_2^u(\xi))^2}-\frac{1}{\psi_2^u(\xi)-\frac{\xi-\eta_0}{\gamma_c}}\right)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\theta_0}^{\tilde{\theta}_c}\left(\frac{1}{(1+\beta\sigma)^2}-\frac{1}{\sigma-\frac{\zeta_1^s(\sigma)-\eta_0}{\gamma_c}}\right)(\zeta_1^s)'(\sigma)d\sigma+$$

$$+\int\limits_{\tilde{\theta}_c}^{\theta}\left(\frac{1}{(1+\beta\sigma)^2}-\frac{1}{\sigma-\frac{\zeta_2^u(\sigma)-\eta_0}{\gamma_c}}\right)(\zeta_2^u)'(\sigma)d\sigma \equiv \tilde{G}(\theta,\theta_0,0), \qquad (22)$$

где $(\tilde{\theta}_c, \tilde{\eta}_c)$ – точка самопересечения медленной кривой. Здесь функции $\psi_1^s(\eta)$, $\psi_2^u(\eta)$ — обратные к функциям $\zeta_1^s(\theta)$, $\zeta_2^u(\theta)$, соответственно. Из (22) видно, что максимальная температура θ^* зависит от начальной температуры горючей смеси θ_0. Решая уравнение

$$\tilde{G}(\theta,\theta_0,0)=0,$$

получим зависимость максимальной температуры безопасного горения от начальной температуры горючего вещества для фильтрационной модели горения. Справедливо следующее

Утверждение 2. *Максимальная температура безопасного горения для модели (16)–(18) при достаточно малых ε — это максимальная температура θ^{γ}_{max} на траектории-утке, выходящей из начальной точки $(\eta=\eta_0, \theta=0)$, где $0<\eta_0<1$ и удовлетворяющая соотношению*

$$\lim_{\gamma\to 0}\theta^{\gamma}_{max}=\theta^*(\theta_0),$$

где θ_0 находится из уравнения медленной кривой системы (16)–(18) при $\eta=\eta_0$.

Таким образом, установлено, что максимальная температура безопасного горения определяется точкой, в которой траектория–утка, моделирующая критический режим, отрывается от неустойчивой части медленной кривой. Получена зависимость максимальной температуры безопасного горения от начальных данных. Проведен анализ этой зависимости.

В **третьей главе** рассматривается явление самовоспламенения топлива, находящегося в пористом изоляционном материале. Это опасное явление может быть вызвано самовоспламенением горючей жидкости, просачивающейся в изоляционный материал горячего трубопровода. Жидкие утечки в пористую изоляцию распределяются по большой поверхности. Так как любой изоляционный материал имеет чрезвычайно низкую удельную теплопроводность, то потери тепла малы, и самовоспламенение может происходить в результате экзотермической реакции окисления. Безразмерная модель самовоспламенения в изоляционном пористом материале с учетом теплоотвода из реакционной среды (газовой смеси) имеет вид

$$\gamma\frac{d\theta}{d\tau}=\bar{\eta}\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right)-\frac{\varepsilon_1\theta}{1+\varepsilon_3\delta}\chi(1-\delta)-\alpha\theta, \qquad (23)$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{d\tau}=-\bar{\eta}\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right)+\frac{\varepsilon_1\Psi\theta}{1+\varepsilon_3\delta}\chi(1-\delta), \qquad (24)$$

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\theta}{\varepsilon_3}\chi(1-\delta), \tag{25}$$

$$\bar{\eta}(0) = 1, \quad \theta(0) = \delta(0) = 0. \tag{26}$$

Здесь θ, $\bar{\eta}$ — безразмерные температура и концентрация газовой смеси, соответственно; безразмерная переменная δ характеризует толщину пленки горючей жидкости ($\delta = 1-\bar{\delta}$, $\bar{\delta}$ — безразмерная толщина пленки), ε_3 — нормирующий коэффициент; τ — безразмерное время. Параметр α характеризует отношение интенсивности тепловыделения химической реакции к интенсивности теплоотвода в окружающую среду. Физический смысл параметров β и γ тот же, что и в Главе 2. Параметр Ψ является отношением энергии сгорания к латентной теплоте парообразования. Параметр ε_1 отражает взаимодействие между процессами сгорания и парообразования, ε_2 представляет собой отношение потенциальной энергии горючего газа и энергии, необходимой для испарении всей жидкости.

В первом параграфе рассмотрен случай $\Psi = 1, \beta = 0$, во втором — общий случай ($\Psi \neq 1$, $\beta \neq 0$). Для обоих случаев описаны основные режимы наблюдаемые в химической системе в зависимости от соотношения между параметрами. Установлено, что критический режим, разделяющий область режимов медленного выгорания и режимы теплового взрыва, моделируется траекторией–уткой. Точка отрыва траектории–утки от неустойчивой части медленной кривой определяет максимальную температуру безопасного самовоспламенения. Задача определения этой максимальной температуры была решена при помощи Теоремы 6.

Остановимся на случае $\Psi = 1, \beta = 0$. Тогда уравнение (9) принимает вид

$$\gamma\frac{du}{d\delta} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\varphi+u)}\left[1-\gamma(\varphi+u)-\frac{\varepsilon_3\alpha}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\delta\right]\times e^{(\varphi+u)} - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varphi}\left[1-\gamma\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_3\alpha}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\delta\right]e^{\varphi} \equiv g(u,\delta,\gamma), \tag{27}$$

где

$$\varphi(\delta,0) = \begin{cases} \zeta_1^s(\theta) = -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\alpha_0\varepsilon_3 e^{\theta}}\left(e^{\theta}\left(\frac{\alpha_0}{\varepsilon_1\varepsilon_2}-1\right)+\alpha_0\theta-D\right), & 0 \le \theta \le \theta_c, \\ \zeta_2^u(\theta) = -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\alpha_0\varepsilon_3 e^{\theta}}\left(e^{\theta}\left(\frac{\alpha_0}{\varepsilon_1\varepsilon_2}-1\right)+\alpha_0\theta+D\right), & \theta \ge \theta_c, \end{cases}$$

$$D = \sqrt{\left(e^{\theta}\left(1-\frac{\alpha_0}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)-\alpha_0\theta\right)^2 + \frac{4\alpha_0}{\varepsilon_1\varepsilon_2}(e^{\theta}-\theta(\varepsilon_1+\alpha_0))}.$$

Отметим, что функция $g(u,\delta,\gamma)$ удовлетворяет условиям Теоремы 6 при достаточно малых значения γ. Тогда

$$G(\delta,\delta_0,0) = \int\limits_{\delta_0}^{\delta_c} \left(-\frac{\varepsilon_3(1+\psi_1^s(\xi))}{\varepsilon_1\varepsilon_2\psi_1^s(\xi)} \left(\alpha_0 + \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_3\xi} \right) \right) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\delta_c}^{\delta^*} \left(-\frac{\varepsilon_3(1+\psi_2^u(\xi))}{\varepsilon_1\varepsilon_2\psi_2^u(\xi))} \left(\alpha_0 + \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_3\xi} \right) \right) d\xi =$$

$$= -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \left(\int\limits_{\theta_0}^{\theta_c} \frac{(1+\sigma)}{\sigma} \left(\frac{\alpha_0(1+\varepsilon_3\zeta_1^s)+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_3\zeta_1^s} \right) (\zeta_1^s)'(\sigma)d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\theta_c}^{\theta^*} \frac{(1+\sigma)}{\sigma} \left(\frac{\alpha_0(1+\varepsilon_3\zeta_2^u)+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_3\zeta_2^u} \right) (\zeta_2^u)'(\sigma)d\sigma \right) \equiv \tilde{G}(\theta,\theta_0,0),$$

где (θ_c,η_c) – точка самопересечения медленной кривой. Здесь функции $\zeta_1^s(\theta)$, $\zeta_2^u(\theta)$ описывают устойчиво–неустойчивую часть медленной кривой системы (23)–(25), вдоль которой движется траектория–утка, а функции $\psi_1^s(\delta)$, $\psi_2^u(\delta)$ — обратные к ним. Таким образом, уравнение

$$\tilde{G}(\theta,\theta_0,0) = 0 \tag{28}$$

определяет значение максимальной температуры безопасного самовоспламенения $\theta=\theta^*$, которое соответствует точке отрыва траектории–утки от медленной кривой системы (23)–(25), и это значение $\theta^*=1.054557404$.

Утверждение 3. *Максимальная температура безопасного горения для модели (23)–(26) при* $\Psi=1,\ \beta=0$, $\alpha=\alpha^*$, $\varepsilon_1>(\sqrt{1+4\varepsilon_2}-1)/2\varepsilon_2$ *и для достаточно малых* ε *— это максимальна температура* θ_{max}^γ *на траектории–утке удовлетворяющая соотношению*

$$\lim_{\gamma\to 0}\theta_{max}^\gamma = \theta^*(\theta_0),$$

где θ_0 *находится из уравнения медленной кривой системы (23)–(25) при* $\delta=\delta_0$.

Для случая $\Psi\neq 1$, $\beta\neq 0$ проведено аналогичное исследование, найдено значение максимальной температуры безопасного самовоспламенения $\theta^*=2.098340113$. Доказано Утверждение 4, аналогичное Утверждению 3.

Следует отметить, что во время критического режима возможны малые возмущения, в результате которых значение δ_0 будет отличным от нуля. Для обоих случаев было установлено, что в результате малых возмущений температура, достигаемая во время критического режима, будет понижаться по сравнению с θ^* для первоначального $\delta_0 = 0$.

Итак, рассмотрена модель теплового взрыва в трехфазной среде (горючая жидкость – горючая газовая смесь – твердая инертная пористая среда). Найдено значение максимальной температуры безопасного самовоспламенения. Исследовано влияние малых возмущений на величину максимальной температуры безопасного самовоспламенения.

В **четвертой главе** на примере неадиабатической модели автокаталитического горения рассмотрены бегущие волны нового типа — волны–утки. Рассматривается модель автокаталитического горения газовой смеси с учетом теплопередачи и диффузии реагирующего вещества в случае одной пространственной переменной ξ:

$$\gamma\frac{\partial\theta}{\partial t} = \eta(1-\eta)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \alpha\theta + \delta\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}, \tag{29}$$

$$\gamma\frac{\partial\eta}{\partial t} = \gamma\eta(1-\eta)\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) + \mu\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}. \tag{30}$$

Здесь θ — безразмерная температура газовой смеси, η — глубина превращения, μ — коэффициент диффузии, δ^{-1} — критерий Франк–Каменецкого, слагаемое $-\alpha\theta$ отражает теплоотвод во внешнюю среду, параметры β и γ характеризуют температурную чувствительность и экзотермичность реакции. Для обычных газовых смесей эти параметры малы. Была поставлена задача изучения решений системы (29), (30) типа бегущей волны, соединяющих положения равновесия $O(\eta = 0, \theta = 0)$ и $P(\eta = 1, \theta = 0)$. Анализ соответствующей краевой задачи, показал, что можно выбрать параметры таким образом, что проекция соответствующей гетероклинической траектории на плоскость (θ, η) лежит в малой окрестности траектории–утки, описывающей критический режим. Будем называть соответствующее решение бегущей волной–уткой. Для простоты изложения, положим $\beta = 0$ (отличия от результатов полученных для $\beta \neq 0$ незначительны). Изучение решения (29), (30) типа бегущей волны со скоростью c, которое соединяет положения равновесия O и P, означает, что рассматриваются решения (29), (30) вида

$$\theta(t,\xi) = \tilde{\theta}(\xi + ct) \equiv \theta(x), \quad \eta(t,\xi) = \tilde{\eta}(\xi + ct) \equiv \eta(x), \tag{31}$$

удовлетворяющие условиям

$$\lim_{x\to-\infty}\eta(x) = \lim_{x\to-\infty}\theta(x) = 0, \lim_{x\to+\infty}\eta(x) = 1, \lim_{x\to+\infty}\theta(x) = 0,$$

где $x = \xi + ct$ — фаза волны.

В параграфе 4.1 исследуется решения типа бегущей волны со скоростью $c = \nu/\gamma$. Введение новой переменной $s = \gamma x$ $(\gamma \neq 0)$ с учетом (31) приводит к системе с тремя быстрыми и одной медленной переменной

$$\frac{d\eta}{ds} = p,\ \gamma\mu\,\frac{dp}{ds} = \nu p - \eta(1-\eta)e^{\theta},$$

$$\gamma\,\frac{d\theta}{ds} = q,\ \gamma\delta\,\frac{dq}{ds} = \nu q - \eta(1-\eta)e^{\theta} + \alpha\theta. \tag{32}$$

Проекция медленной кривой системы (32) на плоскость (θ, η) совпадает с медленной кривой системы (11), (12). В Главе 2 установлено, что при $\alpha = \alpha^*$ система (11), (12) имеет траекторию–утку, моделирующую критический режим. При $\alpha < \alpha^*$ в системе наблюдается режим теплового взрыва, при $\alpha > \alpha^*$ — режим медленного выгорания. Показано, что асимптотические разложения критического параметра $\alpha = \tilde{\alpha}^*(\gamma)$ системы (32) отличается от $\alpha = \alpha^*$ слагаемыми порядка $O(\gamma^2)$, $\gamma \to 0$. Таким образом, при критическом значении параметра $\alpha = \tilde{\alpha}^*(\gamma)$ система (29), (30) имеет бегущую волну–утку, которая играет роль промежуточной формы между волнами медленного выгорания $(\alpha > \tilde{\alpha}^*)$ и волнами самовоспламенения $(\alpha < \tilde{\alpha}^*)$.

В параграфе 4.2 рассматривается случай двух медленных переменных. Полагая в системе (29)–(30) $\delta = \kappa\mu$, где κ —некоторая положительная константа, и введя новую переменную $z = -x/c$, с учетом (31) получим систему

$$\frac{d\eta}{dz} = -p,\ \varepsilon\,\frac{dp}{dz} = -\gamma p + \gamma\eta(1-\eta)e^{\theta},$$

$$\frac{d\theta}{dz} = -q,\ \kappa\varepsilon\,\frac{dq}{dz} = -\gamma + q\eta(1-\eta)e^{\theta} - \alpha\theta, \tag{33}$$

где $\varepsilon = \mu/c^2$. Установлено, что поведение на многообразии описывается следующей системой

$$\frac{d\eta}{dz} = \eta(1-\eta)e^{\theta} + \varepsilon\psi_1(\eta, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

$$\gamma\,\frac{d\theta}{dz} = \eta(1-\eta)e^{\theta} - \alpha\theta + \varepsilon\varphi_1(\eta, \theta) + O(\varepsilon^2). \tag{34}$$

Отметим, что правые части системы (34) отличаются от системы (11), (12) слагаемыми порядка $O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Проекция медленной кривой системы (33) на плоскость (θ, η) совпадает с медленной кривой системы (11), (12). Следовательно, при критическом значении параметра $\alpha = \tilde{\alpha}^*(\gamma)$ система (29), (30) имеет бегущую волну–утку, соединяющую положения равновесия O и P. Волна–утка, отвечающая значению $\alpha = \tilde{\alpha}^*$, разделяет два типа волн: волны медленного выгорания $(\alpha > \tilde{\alpha}^*)$ и волны самовоспламенения $(\alpha < \tilde{\alpha}^*)$.

Так как при оценке максимальной температуры безопасного горения учитываются лишь нулевые приближения критического значения параметра, то в обоих случаях задача определения максимальной температуры на волне–утке, сводится к Утверждению 1. Следовательно, задача определения максимальной температуры на критической волне–утке решена. Таким образом, можно говорить о явлении затягивания потери устойчивости на бегущей волне–утке. И среди бегущих волн возможно выделить ту, которая соответствует максимальной температуре безопасного горения.

В **Заключении** сформулированы основные результаты и выводы работы.

Основные результаты диссертационной работы

1. Развит математический аппарат, позволяющий оценивать величину затягивания потери устойчивости в динамических моделях, в которых наблюдается смена устойчивости медленных движений.

2. Установлена связь между явлением затягивания потери устойчивости в сингулярно возмущенной системе дифференциальных уравнений и оценкой максимальной температуры безопасного горения.

3. Изучены особенности протекания критического режима в динамической модели фильтрационного горения в случае автокаталитической реакции. Определена максимальная температура безопасного горения. Исследована зависимость максимальной температуры безопасного горения от начальных данных.

4. Изучены особенности протекания критического режима в динамической модели самовоспламенения изоляции. Найдено значение максимальной температуры безопасного самовоспламенения. Исследовано влияние малых возмущений на величину этой максимальной температуры.

5. На примере неадиабатической модели автокаталитического горения с учетом расхода реагирующего вещества исследовано явление затягивания потери устойчивости в задаче о бегущих волнах. Определена максимальная температура на критической волне-утке.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в ведущих журналах, рекомендованных ВАК:

1. Голодова, Е.С. Явление затягивания потери устойчивости в автокаталитической модели горения / Е.С. Голодова // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2007. — Т. 14, вып. 1. — С. 104–105.

2. Голодова, Е.С. Бегущие волны в сингулярно возмущенной модели горения / Е.С. Голодова // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2008. — Т. 15, вып. 2. — С. 282–283.

3. Голодова, Е.С. Моделирование безопасных процессов горения с максимальной температурой / Е.С. Голодова, Е.А. Щепакина // Математическое

моделирование. — 2008. — Т. 20, № 5. — С. 55–68.

4. Голодова, Е.С. Исследование сингулярно возмущенной модели самовоспламенения изоляции / Е.С. Голодова // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2009. — Т. 16, вып. 3. — С. 511–512.

Другие публикации:

5. Голодова, Е.С. Модель теплового взрыва в трехфазной среде / Е.С. Голодова // Тезисы докладов межд. молод. конф. "XXXI Гагаринские чтения". — Москва, 2005. — Т. 5. — С. 34–35.

6. Голодова, Е.С. Оценка затягивания потери устойчивости в двухфазной модели горения / Е.С. Голодова, Е.А. Щепакина // Тезисы докладов межд. семинар "Нелинейное моделирование и управление". — Самара, 27 июня–1 июля 2005. — С. 19–20.

7. Щепакина, Е.А. Задача управления с неполной обратной связью для дискретных и непрерывных динамических моделей / Е.А. Щепакина, Е.С. Голодова// Тезисы докладов всерос. научно-практ. конфер. "Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе". — Москва, 2006. — С. 89–91.

8. Golodova, E. Canard-trajectories in the problem of safe combustion / E. Golodova, E. Shchepakina //Тезисы докладов межд. конфер. "Тихонов и современная математика". — Москва, 2006. — С. 44.

9. Golodova, E. Maximal combustion temperature estimation / E. Golodova, E. Shchepakina //Journal of Physics: Confer. Series — 2006. — V. 55. — P. 94–104.

10. Голодова, Е.С. Траектории–утки и критические бегущие волны в задаче горения / Е.С. Голодова, Е.А. Щепакина // Тезисы докладов междун. конфер., посвященной памяти И.Г. Петровского "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". — Москва, 21–26 мая 2007. — С. 102.

11. Голодова, Е.С. Моделирование критических режимов в задаче самовоспламенения изоляции / Е.С. Голодова // Тезисы докладов междун. конфер. "Современные проблемы прикладной матем. и матем. моделирования". — Воронеж, 2—7 февраля 2009. – С. 62–63.

Подписано в печать 20.10.2009.
Формат 60×84/16. Бумага ксероксная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ № 215.

Отпечатано в типографии «Инсома-пресс»
г. Самара, ул. Советской Армии, 217.
тел. 926-07-51