Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

На правах рукописи

Поляков Сергей Владимирович

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С МАЛЫМИ КРАТНОСТЯМИ В РАЗЛОЖЕНИИ КВАДРАТОВ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

(01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Л.С. Казарин

Ярославль
2014

Содержание

Введение

Постановка задачи и актуальность темы диссертации

Изучение особенностей строения конечных групп через заданные свойства неприводимых представлений широко используется в теории групп. Существуют как и очевидные утверждения, так и далеко не тривиальные факты, касающиеся, например, простых групп (см. [29]).

Если φ и ψ — обыкновенные неприводимые представления группы G, то существует разложение

$$\varphi\psi = \sum_{\theta} c^{\theta}_{\varphi\psi}\theta,$$

где θ — неприводимые попарно неэквивалентные представления группы G. Структурные константы $c^{\theta}_{\varphi\psi}$ могут быть определены с помощью характеров представлений θ из соотношений ортогональности.

Интерес представляют случаи, когда на структурные константы накладываются определенные ограничения. В одном из них количество ненулевых констант $c^{\theta}_{\varphi\psi}$ невелико, в другом — сами константы ограничены сверху.

В первом направлении имеются результаты, касающиеся разрешимых групп, и, в первую очередь, p-групп. Достаточно подробно исследован случай, когда характер, полученный как произведение некоторого неприводимого характера на свой сопряженный, имеет в своем разложении малое число различных слагаемых (см. [14],[18]).

Во втором направлении нас интересуют следующие случаи. Рассмотрим группы, у которых тензорные произведения любых двух неприводимых представлений имеют в своем разложении малые кратности.

Конечную группу G назовем *SM_m-группой*[1], если тензорный квадрат любого ее неприводимого представления разлагается в сумму неприводимых представлений группы G с кратностями, не превосходящими m.

В 1941 году лауреат нобелевской премии по физике Юджин Вигнер (Эухенио Вигнер) ввел понятие *SR-группы*.

Просто приводимыми группами (или SR-группами[2]) называются вещественные группы, в которых тензорное произведение любых двух неприводимых представлений не имеет

[1] от английского *«Square multiplicity»*
[2] от *«Simply reducible»*

кратностей (то есть кратности не выше единицы).

В работе [41] Ю. Вигнер показал, что для произвольной конечной группы G справедливо следующее неравенство

$$\sum_{g\in G} |\sqrt{g}|^3 \leq \sum_{g\in G} |C_G(g)|^2, \tag{$*$}$$

где $\sqrt{g} = \{x \in G \mid x^2 = g\}$, а $C_G(g)$ — централизатор элемента g. Конечная группа G является просто приводимой тогда и только тогда, когда вышеуказанное неравенство обращается для этой группы в равенство. Получаемое из $(*)$ равенство называется *«условием Вигнера»*. Несмотря на предложенный критерий, в общем случае проверка условия Вигнера для конкретной конечной группы G является трудоемкой задачей, поэтому вопрос о свойствах и строении SR-групп долгое время оставался открытым.

Для неравенства, предложенного Вигнером существует обобщение. В работе [35] Дж. Макки доказано, что для произвольной конечной группы G справедливы неравенства.

$$\sum_{g\in G} |\sqrt{g}|^{n+1} \leq \sum_{g\in G} |C_G(g)|^n,$$

где n — произвольное натуральное число. Там же приведено доказательство неравенства Вигнера для конечных групп ($n = 2$ — условие Вигнера).

В приложении «Нерешенные задачи» книги [7] А.И. Кострикин, в качестве нерешенной проблемы, сформулировал вопрос о SR-группах:

> Как выразить в общем принадлежность к SR-классу в терминах структурных свойств группы?

С.П. Струнковым были сформулированы конкретные проблемы относительно строения SR-группы: «Дать описание всех просто приводимых групп ... (вопрос, интересный для физиков). Не будет ли конечная просто приводимая группа разрешимой?» (Коуровская тетрадь [8], стр. 61, вопрос 11.94).

Заметим, что в 1984 году, в 9-м издании Коуровской тетради под номером 9.56 был опубликован вопрос Яна Саксла (J. Saxl): «Найти все конечные группы, для которых тензорный квадрат любого обыкновенного неприводимого представления свободен от кратностей» (Коуровская тетрадь [8], стр. 39, вопрос 9.56).

Впоследствии задача С.П. Стрункова была решена Л.С. Казариным, В.В. Янишевским и Е.И. Чанковым (см. [6], [5]). При этом был рассмотрен новый класс групп, более широкий чем SR. При отказе от вещественности и замены требования на разложимость без кратностей только квадратов неприводимых представлений, получаются группы, названные авторами ASR-группами[3]. ASR-группы, как и содержащиеся в их множестве SR-группы, оказались разрешимы.

Необходимо отметить, что вопрос о разрешимости SR-групп ставится только для конечных групп. Для бесконечных групп существует контрпример: трехмерная группа вращений $O(3)$ — SR-группа (см. [11]).

Можно сказать, что ASR-группы являются своеобразной границей. Если хотя бы одна из кратностей больше единицы, то в общем случае говорить о разрешимости группы нельзя.

SM_m-группы являются естественным обобщением SR и ASR групп. Понятно, что в множество SM_2-групп входят как ASR, так и SM_2-группы.

Для удобства введем еще одно определение. Назовем *SM-характеристикой* группы G наибольшую кратность в разложении квадратов неприводимых представлений этой группы. SM-характеристику группы G можно также определить как число $m_\chi(G)$, такое, что G — $\mathrm{SM}_{m_\chi(G)}$, но уже не $\mathrm{SM}_{m_\chi(G)-1}$-группа.

Вероятно, что существует связь между наибольшей кратностью в разложении квадрата неприводимого характера и количеством характеров, входящих в это разложение. Например в [14] было доказано, что если G — конечная нильпотентная группа нечетного порядка и χ — ее неприводимый характер простой нечетной степени p, то наибольшая кратность в разложении характера χ^2 связана с количеством неприводимых слагаемых в его разложении. Более точно, эта кратность равна 2, если слагаемых $(p+1)/2$, и равна p если слагаемое всего одно (см. [14], теорема C).

Заметим, что достаточно часто встречаются конечные разрешимые группы, у которых SM-характеристика больше единицы.

Если рассматривать группы с кратностями в квадратах неприводимых представлений не больших двух (SM_2-группы), то возникает ряд вопросов, связанных с их строением:

Какие из простых неабелевых групп являются SM_2-группами?

Какими особенностями строения обладают неразрешимые SM_2-группы?

[3] от *«Almost simply reducible»*

Какие из разрешимых групп являются SM_2-группами?

SM_2-группы представляют особенный интерес, поскольку являются в каком-то смысле минимальным «расширением» класса ASR-групп.

В общем случае возникает вопрос о связи между SM-характеристикой конечной группы и ее строением.

Цель и методы работы

Целью работы является исследование строения конечных групп, у которых тензорный квадрат любого неприводимого представления содержит неприводимые представления с небольшими кратностями, в частности, не больше двух. В диссертации используются методы доказательств теории конечных групп и теории характеров, в частности теорема Классификации простых конечных групп. В некоторых случаях для дополнительных вычислений была использована система компьютерной алгебры GAP.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми. Главные из них:

1. Получено описание строения неабелевых композиционных факторов конечных неразрешимых SM_2-групп.
2. Получено описание строения всех конечных почти простых SM_2-групп.
3. Для всех конечных простых и почти простых групп получены нижние оценки SM-характеристики.
4. Вычислены SM-характеристики для некоторых конечных почти простых групп (в частности, для всех спорадических простых групп).
5. Получены нижние оценки SM-характеристики для групп Фробениуса, вычислены SM-характеристики некоторых 2-групп.

Положения, выносимые на защиту

1. Доказано, что среди всех конечных почти простых групп SM_2-группами являются только группы $PGL_2(q)$ и знакопеременная группа A_5.
2. Доказано, что неабелевыми композиционными факторами конечных неразрешимых SM_2-групп могут быть только группы, изоморфные группе $L_2(q)$.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по теории конечных групп и их представлениям, в алгебраической комбинаторике, а также в интерпретации некоторых задач теоретической физики.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на научно-практической конференции «Ярославский край. Наше общество в третьем тысячелетии» (Ярославль, 2010), на конференции «Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей», Новосибирск (2010), на 64-й научной студенческой конференции (Ярославль, 2011), на международной (43-й Всероссийской) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 2012), на XI Белорусской математической конференции (Минск, 2012), а также на научных семинарах «Избранные вопросы теории групп» кафедры алгебры и математической логики ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Ярославль, 2011-2013).

Публикация результатов

Материал диссертации был опубликован в цикле работ, состоящем из 4 статей (в том числе 2 статьи в журнале из списка рекомендованных ВАК РФ), и 4 тезисов докладов. Все 4 статьи написаны без соавторов.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из оглавления, введения, шести глав (22 параграфов), заключения, списка литературы из 41 наименования и приложений. Текст диссертации изложен на 102 страницах.

Содержание диссертации

Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на параграфы. Нумерация всех результатов (теорем, лемм, следствий, предложений, определений) сквозная и состоит из трех цифр: первая цифра — номер главы, вторая — номер параграфа и третья — порядковый номер внутри параграфа. Формулы и таблицы имеют сквозную нумерацию внутри всей диссертации.

Введение

Во введении обосновывается актуальность проблемы, делается постановка задачи, приводится краткий обзор уже известных результатов. Далее следует содержание диссертации, а также обзор полученных в ней результатов.

1. Предварительные сведения

Данная глава носит вспомогательный характер. В ней формулируются основные определения и результаты, используемые в диссертации.

В параграфе 1.1 изложены сведения теоретико-группового характера. Даны определения полупрямого произведения, нормального и композиционного ряда, почти простой группы, цоколя группы.

В параграфе 1.2 приводятся сведения из теории представлений и теории характеров. Вводится понятие индуцированного характера, характера Стейнберга простой неабелевой группы лиева типа, закон взаимности Фробениуса. Приводятся основные формулировки теории Клиффорда, сведения о характерах знакопеременной группы A_n, в частности, «формула крюков», указаны наибольшие значения степени неприводимого характера знакопеременной группы A_n при $5 \leqslant n \leqslant 12$.

Далее в параграфе приводятся таблицы характеров группы $L_2(q)$ для четных q, и $PGL_2(q)$, а также значения двух характеров группы $L_2(q)$ для нечетных q. В конце параграфа даны таблицы значений двух специальных характеров групп $L_3(q)$ и $U_3(q)$ и доказываются леммы о кратности вхождения одного характера в разложение квадрата другого.

В параграфе 1.3 излагаются сведения о простых неабелевых группах: оценки классового числа, порядки групп внешних автоморфизмов, степени характера Стейнберга групп лиева типа. Для групп $L_n(q)$, $U_n(q)$, $B_n(q)$, $C_n(q)$ при небольших n и q вычислены точные значения классового числа. В конце параграфа приведены сведения о спорадических группах, а именно: значения классового числа, порядков самих групп и групп их внешних автоморфизмов.

В параграфе 1.4 приводится неравенство Галлахера, дающее верхнюю и нижнюю оценку для классового числа группы через индекс и классовое число ее подгруппы. Кроме того, дается оценка числа неприводимых характеров нормальной подгруппы конечной группы через классовое число этой группы. Также приведены оценки классового числа группы S_n и ее подгруппы G.

Параграф 1.5 посвящен выводу основных свойств SM_m-групп. Доказываются неравенства, связывающие порядок SM_m-группы, ее классовое число и степень неприводимого представления:

Лемма 1.5.2. *Пусть G — конечная SM_m-группа. Тогда для любого неприводимого характера χ группы G, $\chi(1) \leqslant mk(G)$.*

Лемма 1.5.3. *Пусть G — конечная SM_m-группа. Тогда $|G| \leqslant m^2k(G)^3$.*

Лемма 1.5.4. *Пусть G — конечная SM_m-группа. Тогда для любого ее неприводимого характера χ выполняется: $\chi^2(1) \leqslant m\sqrt{|G|k(G)}$.*

Лемма 1.5.5. *Пусть G — неразрешимая SM_m-группа. Тогда степень любого ее неприводимого характера χ удовлетворяет неравенству $\chi(1) \leqslant mk(G) - m$.*

Кроме того, указывается критерий, по которому удалось получить нижние оценки $m(G)$ для SM-характеристики $m_\chi(G)$ группы G. С помошью этого критерия отсеивались группы, заведомо не попадающие в список SM_2-групп.

В параграфе 1.6 приведены простые и почти простые группы, для которых удалось определить их SM-характеристику. Отдельно даны результаты для спорадических групп и их групп автоморфизмов.

2. Кратности в разложении квадратов неприводимых представлений почти простых групп с цоколем, изоморфным $L_2(q)$

В этой главе исследуются почти простые группы с цоколем, изоморфным группе $L_2(q)$, для которых определяется SM-характеристика.

В начале главы в параграфе 2.1 доказываются вспомогательные утверждения, касающиеся сумм примитивных корней из единицы в поле комплексных чисел.

В параграфе 2.2 рассматриваются группы $L_2(q)$. С помощью вычислений по таблице характеров доказывается при четном q, что для любых двух неприводимых характеров кратность вхождения одного в разложения квадрата другого не превосходит 2. Другими словами, доказывается для четного q, что $L_2(q)$ — SM_2-группа и ее SM-характеристика равна двум.

Для нечетного $q \geqslant 3$ выбирается пара подходящих характеров, с помощью которых показывается, что в этом случае SM-характеристика равна трем (кроме случаев $q = 3$ и 5). Здесь не проводилась полная проверка для всех пар неприводимых характеров, но, как показывают вычисления для групп $L_2(q)$ при $5 < q < 125$, именно это значение и будет наибольшим. Таким образом, можно предполагать, SM-характеристика группы $L_2(q)$ в случае нечетного q будет равна трем.

В параграфе 2.3 доказывается, что группы $PGL_2(q)$, $q > 3$, являются SM_2-группами.

Следует отметить, что в начале исследования среди простых неабелевых групп была известна только одна SM_2-группа — A_5. Поскольку существует изоморфизм групп $A_5 \cong L_2(4) \cong L_2(5)$, то появление групп $L_2(q)$, по крайней мере, для четных q, в списке SM_2-групп было вполне логично. Неожиданным оказалось то, что класс простых SM_2-групп содержал только эти группы (исключение $q = 5$). Как оказалось впоследствии, и эти группы — частный случай групп $PGL_2(q)$ ввиду изоморфизма $L_2(q) \cong PGL_2(q)$ для четных q.

Наконец, в параграфе 2.4 разбираются случаи, когда G — почти простая группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, отличная от $L_2(q)$ и $PGL_2(q)$. В каждом из них доказано, что SM-характеристика $m_\chi(G)$ группы G больше двух.

Итог главы — теорема:

Теорема 2.4.4. *Пусть G конечная почти простая SM_2-группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$. Тогда G изоморфна A_5 или $PGL_2(q)$.*

3. Простые SM_2-группы

При изучении конечных групп, у которых квадраты неприводимых представлений имеют небольшие кратности, первым возник вопрос о том, какие из простых неабелевых групп будут SM_2-группами. Выбор SM_2-групп объясняется тем, что ASR-группы (SM_1-группы) уже достаточно хорошо изучены (см. [6], [5]).

В общем случае вопрос можно сформулировать так: для указанного m определить, какие из простых неабелевых групп входят в класс SM_m-групп, в частности перечислить группы, у которых SM-характеристика в точности равна m.

Для получения необходимой информации о конечных SM_m-группах использовались леммы 1.5.2 и 1.5.5. Для каждой простой неабелевой группы L было рассмотрено число $m(L)$, равное отношению степени некоторого ее неприводимого характера χ к числу классов сопряженных элементов $k(L)$. В силу леммы 1.5.5, если L — неразрешимая SM_m-группа, то $\chi(1) < m(k(L)-1)$ для любого неприводимого характера χ группы L. Поэтому, если для группы L значение $m(L)$ больше некоторого числа r, то и ее SM-характеристика $m_\chi(L)$ больше r. Другими словами, L не является SM_r-группой.

Неоднозначность определения числа $m(L)$ объясняется тем, что не всегда известна наибольшая из степеней неприводимых характеров. С другой стороны, здесь важнее были оценки значений $m(L)$ снизу. В качестве подходящего характера, как правило, использовался характер Стейнберга, но в ряде случаев, для уточнения полученного числа, были использованы другие неприводимые характеры большей степени.

В конце главы подводится итог исследований для простых групп:

Теорема 3.4.2. *Пусть L—конечная простая набелева SM_2-группа. Тогда L изоморфна группе $L_2(q)$, где $q = 2^t \geqslant 4$.*

4. Почти простые SM_2-группы

Как и в предыдущей главе, здесь была использована лемма 1.5.5. Для каждой из почти простых групп G с цоколем L рассматривалось число $m(G) = \psi_0(1)/k(G)$, где ψ_0 — неприводимый характер группы G. С учетом результатов главы 3, окончательную оценку снизу для $m(G)$ можно записать так:

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{k(\mathrm{Out}(L))} \geqslant \frac{m(L)}{|\mathrm{Out}(L)|}.$$

В том случае, когда эта оценка неэффективна, используется дополнительная информация о группе G, а также лемма 1.5.4.

Оказалось, что если $L \neq L_2(q)$, то в этом случае SM-характеристика $m_\chi(G) > 2$ поэтому G не будет являться SM_2-группой. Окончательный результат этой главы обобщает теорему 2.4.4:

Теорема 4.4.2. *Пусть G — конечная почти простая SM_2-группа. Тогда G изоморфна A_5 или $PGL_2(q)$.*

5. Неразрешимые SM_2-группы

Для неразрешимых SM_2-групп небольшого порядка удалось установить, что все их неабелевы композиционные факторы изоморфны группе $L_2(q)$. Цель исследований главы 5 — выяснить, верно ли это и для остальных конечных неразрешимых SM_2-групп.

Дальнейшие рассуждения строились в предположении, что существуют неразрешимые SM_2-группы с неабелевыми композиционными факторами, отличными от $L_2(q)$. Среди всех таких групп была выбрана группа G наименьшего порядка — минимальный контрпример.

В четырех последующих утверждениях в качестве SM_2-группы G рассматривается этот контрпример. В начале главы доказывается

Лемма 5.0.3. *Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда:*

1. *N — единственная минимальная нормальная подгруппа G, то есть N — цоколь группы G.*
2. *$N \cong L_1 \times \cdots \times L_m$ — характеристически простая группа; все L_i изоморфны простой неабелевой группе L.*
3. *G изоморфна подгруппе сплетения $\mathrm{Aut}(L) \wr S$, где S — подгруппа симметрической группы S_m, действующая транзитивно на множестве минимальных нормальных подгрупп группы N.*

Далее с учетом этих структурных особенностей группы G и в этих обозначениях доказывается:

Лемма 5.0.4. *Пусть χ_0 — неприводимый характер группы G наибольшей степени. Тогда*

$$\chi_0(1) < c \cdot |\mathrm{Out}(L)| \cdot k(L),$$

где $c = (2 \cdot k(S))^{1/n}$, а $k(S)$ — классовое число группы S.

Если $n > 2$, то $c \leqslant 1,82$ и $c = 2$, если $n = 2$.

В следующих двух утверждениях мы ограничиваем список рассматриваемых групп до конкретных случаев.

Теорема 5.0.5. *Пусть $n \leqslant 2$. Тогда группа L изоморфна одной из следующих групп: A_7, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$, $U_3(16)$.*

Следствие 5.0.6. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда L — одна из следующих групп: $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$.*

В конце главы, после дополнительной проверки для оставшихся групп, показывается, что L не может быть ни одной из перечисленных групп. Таким образом, доказывается:

Теорема 5.0.7. *Пусть G — неразрешимая SM_2-группа. Тогда ее простые неабелевы композиционные факторы изоморфны группе $L_2(q)$.*

6. Некоторые классы конечных SM$_m$-групп

Глава 6 посвящена SM$_2$-группам в некоторых частных случаях.

В параграфе 6.1 разбирается случай, когда $G \cong M \rtimes H$ — группа Фробениуса с ядром M. Доказано, что SM-характеристика $m_\chi(G)$ группы G не меньше, чем $\dfrac{|H|^2 - |H|}{|M| - 1}$. В качестве примера приводится список некоторых метациклических групп Фробениуса, для которых вычислена SM-характеристика.

Далее в главе 6 рассматриваются разрешимые группы. В параграфах 6.2-6.4 приведены результаты вычислений SM-характеристики $m_\chi(G)$ для 2-групп. Сначала даются сведения о количестве SM$_2$ и SM$_4$-групп среди неабелевых, в частности метабелевых 2-групп порядков, не превосходящих 256. Далее, для некоторых случаев указывается строение, классовое число, SM-характеристика $m_\chi(G)$ и идентификатор группы в системе GAP. Показано, что $m_\chi(G)$ может принимать значения, равные только 1, 2 и 4.

В отдельной таблице приводятся сведения о ступенях разрешимости 2-групп с характеристикой $m_\chi(G) \geqslant 2$. Установлено, что все группы порядков 32 и 64 — SM$_2$-группы, причем группы, у которых $m_\chi(G) = 2$, имеют ступень разрешимости не меньше двух. Для групп порядков 128 и 256 ситуация несколько сложнее. Значения ступеней разрешимости для групп с SM-характеристикой большей единицы равны только 2 или 3.

Параграф 6.5 содержит сведения о количестве всех SM$_m$-групп среди разрешимых неабелевых групп порядков 6–400 (за исключением 2-групп).

Заключение

Заключение содержит гипотезы, формулировки которых обобщают полученные в диссертации результаты. Эти гипотезы могут служить ориентирами для дальнейших исследований по SM_m-группам.

Далее следует список литературы из 41 наименования.

Приложения

В приложениях описываются команды GAP, использованные в работе. Приводятся тексты программ.

1 Вспомогательные результаты

1.1 Теоретико-групповые сведения

В данной диссертации термин группа всегда означает конечную группу.

Пусть G — группа. Множество ее неединичных элементов обозначаем через $G^{\#}$. Тривиальную группу обозначаем символом 1. Если x, y — элементы группы G, и $H \leqslant G$, то используем обозначения: $x^{-1}yx = y^x$, $x^{-1}Hx = H^x$, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Если A, B — подгруппы группы G, то через $[A, B]$ обозначается подгруппа G порожденная всеми элементами вида $[a, b]$, где $a \in A$, $b \in B$.

Выражение $A \times B$ обозначает прямое произведение подгрупп A и B некоторой группы G.

Выражение $G = A \rtimes B$ обозначает полупрямое произведение подгрупп A и B некоторой группы G.

Определение 1.1.1. *Группа G называется полупрямым произведением подргупп A и B, если $A \trianglelefteq G$, $B \leq G$, $A \cap B = 1$ и $G = AB$.*

Определение 1.1.2. *Возрастающим рядом подгрупп группы G называется конечная последовательность G_0, G_1,..., G_n подгрупп из G такая, что $G_i \leq G_{i+1}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $G_0 = 1$ и $G_n = G$. Такой ряд записывают в виде*

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G \tag{1}$$

Определение 1.1.3. *Если есть ряд подгрупп (1), в котором $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$, то фактор-группы G_{i+1}/G_i называются его факторами.*

Определение 1.1.4. *Ряд (1) называется*

1. *нормальным, если $G_i \trianglelefteq G$ для всех $i \in \{0, ..., n-1\}$,*
2. *композиционным, если G_i — максимальная нормальная в G_{i+1} для всех $i \in \{0, ..., n-1\}$,*
3. *центральным, если $G_i \trianglelefteq G$ и $G_{i+1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$ для всех $i \in \{0, ..., n-1\}$.*

Определение 1.1.5. *Подгруппа конечной группы G, порожденная всеми ее минимальными нормальными подгруппами, называется цоколем группы G и обозначается через $Soc(G)$.*

Определение 1.1.6. *Пусть L — простая неабелева группа. Группа G называется почти простой, если она изоморфна подгруппе T, где $L \leqslant T \leqslant \mathrm{Aut}(L)$.*

Замечание 1. *Определенная выше группа G будет неразрешимой и при этом содержит ровно один композиционный фактор, изоморфный группе L.*

Предложение 1.1.7. Минимальная нормальная подгруппа конечной группы G является прямым произведением нескольких простых групп, сопряженных между собой в G.

1.2 Сведения из теории представлений

Терминология, касающаяся теории представлений и характеров групп, соответствует книгам [2], [28]. Везде, если это не оговорено явно, рассматриваются только обыкновенные представления, т.е. представления над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. В частности, неприводимый характер — характер неприводимого представления над полем комплексных чисел. Через $\mathrm{Irr}(G)$ обозначается множество всех неприводимых характеров группы G.

1.2.1 Начальные сведения

Предложение 1.2.1. Любое представление факторгруппы является представлением исходной группы.

Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times m}$ — две матрицы над полем $\mathbb{C}$.

Определение 1.2.2. *Кронекеровым произведением матрицы A на матрицу B называется матрица C размеров $mn \times mn$, которая получается из матрицы A заменой элементов a_{ij} блоками $a_{ij}B$. Используется обозначение $C = A \otimes B$.*

Определение 1.2.3. *Пусть G — конечная группа. Тензорное произведение представлений $\varphi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ и $\psi : G \to GL_m(\mathbb{C})$ определяется как отображение*

$$\varphi \otimes \psi : g \to \varphi(g) \otimes \phi(g) \ \ (g \in G).$$

Предложение 1.2.4. Характер представления $\varphi \otimes \psi$ равен произведению характеров представлений φ и ψ: $\chi^{\varphi\otimes\psi} = \chi^{\varphi} \cdot \chi^{\psi}$.

Предложение 1.2.5. Любое неприводимое представление прямого произведения $G = A \times B$ является тензорным произведением неприводимого представления A и неприводимого представления B. В частности, любой неприводимый характер группы G есть произведение $\varphi\psi$, где $\varphi \in \mathrm{Irr}(A)$, $\psi \in \mathrm{Irr}(B)$.

Доказательство. См. [28], Теорема (4.21). □

1.2.2 Характеры простых и неразрешимых групп

Предложение 1.2.6. Пусть G — неразрешимая группа. Тогда число различных степеней неприводимых характеров не меньше 3.

Доказательство. См. [28], следствие (12.6). □

Предложение 1.2.7. Пусть G — простая неабелева группа. Тогда существует такой комплексный неприводимый характер χ группы G, что $|G|$ меньше $\chi(1)^3$.

Доказательство. См.[29] □

Предложение 1.2.8. Пусть L — простая неабелева группа лиева типа, определенная над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p. Тогда L имеет неприводимый характер St_L, который называется характером Стейнберга, степень которого равна порядку силовской p-подгруппы группы L.

Доказательство. Содержится в [21]. □

1.2.3 Индуцированные представления и характеры

Скалярное произведение характеров χ_1 и χ_2 группы G обозначается $[\chi_1, \chi_2]$:

$$[\chi_1, \chi_2] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)}$$

В том случае, когда требуется уточнить, на какой именно группе рассматривается скалярное произведение, мы помечаем знак скалярного произведения индексом внизу, например $[\chi_1, \chi_2]_G$. В тех случаях, когда вычисление ясно из контекста, индекс у знака скалярного произведения опускается.

Пусть G — конечная группа и H — ее подгруппа. Для каждого представления φ группы H определим представление φ^G, которое называется представлением индуцированным φ.

Пусть $G = Ht_1 \cup ... \cup Ht_s$ — разложение группы G на правые смежные классы по подгруппе H, $s = |G : H|$. Опеределим сначала отображение φ' группы G в множество $M_n(\mathbb{C})$ матриц $n \times n$ над $\mathbb{C}$, где n — степень представления φ, положив

$$\varphi'(g) = \begin{cases} \varphi(g) & \text{при } g \in H, \\ O_n & \text{при } g \in G \setminus H, \end{cases} \tag{2}$$

где O_n — нулевая матрица размера $n \times n$. Определим теперь отображение φ^G группы G в $M_{ns}(\mathbb{C})$:

$$\varphi^G(g) = \left(\begin{array}{c|c|c} & \vdots & \\ \hline \cdots & \varphi'(t_i g t_j^{-1}) & \cdots \\ \hline & \vdots & \end{array} \right), \tag{3}$$

т.е. $\varphi^G(g)$ есть матрица размеров $ns \times ns$, состоящая из s^2 блоков степени n таких, что блок с координатами (i, j) равен $\varphi'(t_i g t_j^{-1})$. Заметим, что в такой блочной записи матрицы $\varphi^G(g)$ в каждой строке и в каждом столбце ее имеется ровно один ненулевой блок. Действительно, $\varphi'(t_i g t_j^{-1}) \neq O_n$ тогда и только тогда, когда $t_i g \in Ht_j$.

Предложение 1.2.9. Для любой подгруппы H конечной группы G, любого представления φ группы H и любой системы $t_1, ..., t_s$ представителей правых смежных классов G по H отображение $\varphi^G : g \to (\varphi'(t_i g t_j^{-1}))$, является представлением группы G. Кроме того,

$$\chi^{\varphi^G}(g)|H| = \sum_{x \in G} \chi^{\varphi'}(xgx^{-1}),\ \chi^{\varphi'}(g) = \begin{cases} \chi^{\varphi}(y) & \text{при } y \in H, \\ 0 & \text{при } y \in G \setminus H, \end{cases} \tag{4}$$

где $\chi^{\varphi^G}(g)$ — характер представления φ.

Доказательство. См. [2], теорема 14, стр. 71. □

Определение 1.2.10. *Представление φ^G группы G, определенное в предложении 1.2.9, называется представлением, индуцированным представлением φ.*

Представление φ^G определяется системой представителей $t_1, ..., t_s$ смежных классов по подгруппе H. Такие представления являются эквивалентными, откуда следует, что они имеют один и тот же характер (см. [2]).

Определение 1.2.11. *О характере χ^{φ^G} представления φ^G говорят, что он индуцирован характером χ^{φ}.*

Ограничение характера χ группы G на ее подгруппу H обозначается $\chi|_H$.

Предложение 1.2.12 (закон взаимности Фробениуса)**.** Для любых характеров χ группы G и Θ ее подгруппы H справедливо равенство:

$$\left[\chi, \Theta^G\right]_G = \left[\chi|_H, \Theta\right]_H.$$

Доказательство. См. [2], теорема 15, стр. 74. □

1.2.4 Теория Клиффорда

В данном разделе формулируются основные положения теории Клиффорда, используемые в работе.

Определение 1.2.13. *Пусть H—нормальная подгруппа группы G, χ — характер H. Сопряженным к характеру χ с помощью элемента $g \in G$ называется характер $\chi^g : H \to \mathbb{C}$, определяемый равенством $\chi^g(h) = \chi(ghg^{-1})$.*

Предложение 1.2.14. Пусть H—нормальная подгруппа группы G, $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$, а $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Тогда из условия $[\chi_H, \psi] = e \neq 0$, следует, что

$$\chi_H = e \sum_{i=1}^{l} \psi_i,$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_l$ — характеры, сопряженные с ψ.

Доказательство. См. [28], глава 6. теорема 6.2 □

Определение 1.2.15. *Пусть G — конечная группа, H — ее нормальная подгруппа и χ — характер H. Подгруппа $I_G(\chi)$, состоящая из всех $g \in G$, для которых $\chi^g = \chi$ называется подгруппой инерции характера χ.*

Предложение 1.2.16. Пусть H — нормальная подгруппа конечной группы G с разрешимой факторгруппой G/H и ψ — неприводимый характер H. Тогда $\psi^G = \sum_{i=1}^{s} e_i\chi_i$, где $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$, e_i делят $|I_G(\psi)/H|$, $\chi_i|_H = e_i \sum_{j=1}^{l} \psi_j$, где ψ_j — сопряженные характеры к характеру $\psi = \psi_1$, $l = |G : I_G(\psi)|$ и $\sum_{i=1}^{s} e_i^2 = |I_G(\psi) : H|$. Если $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $[\chi|_H, \psi] \neq 0$, то $\chi = \chi_i$ для некоторого $i \leqslant s$.

Доказательство. См. [28], глава 6. □

1.2.5 Характеры групп Фробениуса

Предложение 1.2.17. Пусть $G \cong K \rtimes H$ — группа Фробениуса с ядром M и дополнением H. Тогда:

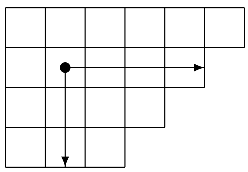
1. Если φ — неприводимый неглавный характер группы K, то $\varphi^G \in \mathrm{Irr}(G)$ и $I_G(\varphi) = K$.
2. Если $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и K не принадлежит ядру χ, то найдется $\varphi \in \mathrm{Irr}(K)$ такой, что $\varphi^G = \chi$.

Доказательство. См. [28], теорема 6.34. □

1.2.6 Характеры знакопеременной группы A_n

Определение 1.2.18. *Разбиением целого положительного числа n называется представление n в виде суммы целых положительных чисел $n = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ таких, что где $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_k \geqslant 0$.*

В приложении приведен текст программы для вычисления размерностей неприводимых представлений групп A_n, отвечающих заданному разбиению числа n и ассоциированной с ним таблице Юнга (см. [25]). Таблица Юнга состоит из k строк, таких, что в каждой i-й строке находится x_i клеток. С каждой клеткой этой таблицы можно связать число («длину крюка»), равное числу клеток находящихся в том же столбце и ниже, а также в той же строке и правее данной клетки, плюс один:



Таким образом, таблице Юнга для каждого разбиения числа n сопоставляется набор из n чисел, соответствующих длинам крюков таблицы.

Предложение 1.2.19. Пусть имеется таблица Юнга, отвечающая некоторому разбиению числа n, и $h_1, ..., h_n$ — ее длины крюков. Тогда характер χ симметрической группы S_n, отвечающий этому разбиению, имеет степень

$$\chi(1) = \frac{n!}{h_1 \cdot \ldots \cdot h_n}.$$

Ограничение неприводимого характера симметрической группы S_n, определяемого таблицей Юнга, на ее подгруппу, изоморфную знакопеременной группе A_n, будет неприводимым, если таблица Юнга не является симметричной относительно своей главной диагонали.

Доказательство. См. [4], Теорема 20.1. □

Значения $\chi_0(1)$ неприводимых характеров максимальной степени знакопеременной группы A_n для $n \leqslant 23$ можно найти на персональной странице Нейла Слоэна, последовательность A060955[4]. Там же имеется информация о классовом числе $k(A_n)$, и числе разбиений $p(n)$[5]. Информацию о числе разбиений $p(n)$ также можно найти в [13], с 53.

Эти же значения, причем для значительно бо́льших n, можно получить и с помощью GAP, используя стандартные функции: `NrConjugacyClasses()` и `NrPartitions()`. Кроме того, можно использовать специально написанную функцию `CharDegreesAn()` для вычисления степеней неприводимых представлений знакопеременной группы A_n (см. приложения).

Таблица 1. Значения $p(n), k(A_n), \chi_0(1)$, для $5 \leqslant n \leqslant 12$

L	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
$k(L)$	5	7	9	14	18	24	31	43
$p(n)$	7	11	15	22	30	42	56	77
$\chi_0(1)$	5	10	35	70	216	567	2310	5775

1.2.7 Характеры групп $L_2(q)$ и $PGL_2(q)$

Приведем таблицу характеров группы $G = L_2(q)$, $q = 2^n \geqslant 8$. У группы G имеется единственный линейный характер — 1_G. Кроме того, есть характер Стейнберга St степени q. Семейство характеров φ_i состоит из $(q-2)/2$ характеров степени $q+1$, а семейство характеров ζ_j, каждый степени $q-1$, состоит из $q/2$ характеров.

Размеры классов сопряженных элементов следующие: $|u^G| = q^2-1$, $|(a^r)^G| = q(q+1)$, где r принимает целые значения от 1 до $q/2-1$, $|(b^s)^G| = q(q-1)$, s принимает целые

[4] https://oeis.org/A060955

[5] последовательности A000702 и A000041

значения от 1 до $q/2$.

Таблица характеров взята из [38]. Также см. [1], таблица 1, стр. 260.

Таблица 2. Таблица характеров $L_2(q),\ q = 2^n \geqslant 8$

	1	u	a^r	b^s
1_G	1	1	1	1
St	q	0	1	-1
φ_i	$q+1$	1	$\alpha^{ir} + \alpha^{-ir}$	0
ζ_j	$q-1$	-1	0	$-\beta^{js} - \beta^{-js}$

где α — корень степени $q-1$ единицы, β — корень степени $q+1$ из единицы.

Нам также понадобятся значения двух неприводимых характеров группы $L_2(q)$ для нечетных q. В таблице 3 приведен фрагмент таблицы характеров группы $G \cong L_2(q)$ для $q = 4k+1$. Размеры классов сопряженных элементов у a^r следующие: при $1 \leqslant r \leqslant k-1$ размер $|(a^r)^G| = q(q+1)$, а размер класса $(a^k)^G$ равен $q(q+1)/2$. Порядок элемента α равен $(q-1)/2$.

Таблица 3. Фрагмент таблицы характеров $L_2(q),\ q = 4k+1$

	1	u	v	a^r	b^s
St	q	0	0	1	-1
θ	$q+1$	1	1	$\alpha^r + \alpha^{-r}$	0

В таблице 4 рассматриваются два характера группы $L_2(q)$ для $q = 4k+3$. Размеры классов сопряженных элементов у a^r, $1 \leqslant r \leqslant (q-3)/4 = k$ равны $|(a^r)^G| = q(q+1)$.

Таблица 4. Фрагмент таблицы характеров $L_2(q),\ q = 4k+3$

	1	u	v	a^r	b^s
St	q	0	0	1	-1
θ	$q+1$	1	1	$\alpha^r + \alpha^{-r}$	0

Дополнительно рассмотрим таблицу характеров группы $G \cong PGL_2(q)$. Если $q = 2^n$, то $PGL_2(q) \cong L_2(q)$, поэтому считаем, что q нечетно. В таблице имеются два характера степени 1: главный характер 1_G и характер Sgn. Кроме того, есть характер Стейнберга St и характер $SgnSt$ степени q. Семейство характеров φ_i состоит из $(q-3)/2$ характеров степени $q+1$, а семейство характеров ζ_j, каждый степени $q-1$, состоит из $(q-1)/2$ характеров.

Размеры классов сопряженных элементов будут такими:
$|u^G| = q^2 - 1$, $|(a^r)^G| = q(q+1)$, $1 \leqslant r \leqslant (q-3)/2$, $|(b^s)^G| = q(q-1)$, $1 \leqslant s \leqslant (q-1)/2$, $|(z_-)^G| = q(q+1)/2$, $|(z_+)^G| = q(q-1)/2$.

Таблица 5. Таблица характеров группы $PGL_2(q)$, q— нечетное

	1	u	a^r	z_-	b^s	z_+
1_G	1	1	1	1	1	1
Sgn	1	1	$(-1)^r$	$(-1)^{(q-1)/2}$	$(-1)^s$	$(-1)^{(q+1)/2}$
St	q	0	1	1	-1	-1
$SgnSt$	q	0	$(-1)^r$	$(-1)^{(q-1)/2}$	$(-1)^{s+1}$	$(-1)^{(q-1)/2}$
φ_i	$q+1$	1	$\alpha^{ir} + \alpha^{-ir}$	$2(-1)^i$	0	0
ζ_j	$q-1$	-1	0	0	$-\beta^{js} - \beta^{-js}$	$2(-1)^{j+1}$

где α — первообразный корень степени $q-1$ единицы, β — первообразный корень степени $q+1$ из единицы. Информация о характерах взята из [19].

Предложение 1.2.20. Если γ — автоморфизм группы $PGL_2(q)$, индуцированный автоморфизмом поля $\mathbb{F}_q$ и $q \notin \{4, 5, 9\}$, то γ имеет точную орбиту на множестве характеров группы $L = L_2(q)$, имеющих степень $q+1$.

Доказательство. см. [6] □

1.2.8 Кратности в разложениях квадратов неприводимых характеров групп $L_3(q)$ и $U_3(q)$

Необходимая нам информация о характерах χ_{st}, χ_{r^2s} группы $L_3(q)$ вычислена по таблице характеров из [39]. Мы будем использовать следующие обозначения: C_i — семейство классов сопряженных элементов, $|C_i|$ — размер каждого из классов, а $N(C_i)$ — количество классов в семействе C_i.

Таблица 6. Значения характеров χ_{st}, χ_{r^2s} группы $L_3(q)$

	C_1	C_2	$C_3^{(l)}$	$C_4^{(k)}$	$C_5^{(k)}$	C_6'	$C_6^{(k,l,m)}$	$C_7^{(k)}$	$C_8^{(k)}$
$\lvert C_i \rvert$	1	rst	$qr'rst$	q^2t	q^2rst	q^3st	q^3st	q^3rt	q^3r^2s
χ_{st}	st	$q+s$	1	B	A	C	D	0	0
χ_{r^2s}	r^2s	$-r$	1	0	0	0	0	0	$E_{u,k}$
$N(C_i)$	1	1	d	$r'-1$	$r'-1$	$1-d'$	$t''-r''$	$3t''-r''-d'$	$2t''$

В таблице были использованы следующие обозначения:

$r = q-1$, $s = q+1$, $t = q^2+q+1$, $d = (3,r)$, $r' = r/d$, $s' = s/d$, $t' = t/d$, $d' = (3-d)/2$, $t'' = (t'-1)/6$, $A = \epsilon^{-3uk} + \epsilon^{-3vk} + \epsilon^{-3wk}$, $B = sA$, $C = 3A$, $D = \sum_{[u,v,w]} \epsilon^{uk+lv+mw}$, $\epsilon^r = 1$, $E_{u,k} = \gamma^{uk} + \gamma^{quk} + \gamma^{q^2wk}, \gamma^{dt} = 1$.

Лемма 1.2.21. *Пусть χ_{st}, χ_{r^2s} — неприводимые характеры группы $L_3(q)$ степеней $(q+1)(q^2+q+1)$ и $(q-1)^2(q+1)$ соответственно. Тогда $[\chi_{st}^2, \chi_{r^2s}] = d(q+3)$.*

Доказательство. Вычислим скалярное произведение: $[\chi_{st}^2, \chi_{r^2s}]$:

$$[\chi_{st}^2, \chi_{r^2s}] = \frac{1}{|G|}\Big(s^2t^2r^2s - (q+s)^2r^2st + qr'rstd\Big) = \frac{r^2st}{q^3r'rst}\Big(s^2t - (q+s)^2 + q\Big) =$$

$$= \frac{d}{q^3}\Big(s^2t - q^2 - 2qs - s^2 + q\Big) = \frac{d}{q^3}\Big(s^2(t-1) - q^2 + q(1-2s)\Big) =$$

$$= \frac{d}{q^2}\Big(s^2(q+1) - 2s + 1\Big) = \frac{d}{q^2}\Big(q(s^2-1) + (s-1)^2\Big) = d(s+2) = d(q+3).$$

Лемма доказана. □

Приведем значения характеров χ_{rt} и χ_{r^2s} для групп $U_3(q)$. В дальнейшем нам понадобятся группы $U_3(q)$ где $q = p^2 > 2$. Как несложно убедиться, наибольший общий делитель $d = (q+1, 3)$ в этом случае равен 1. Действительно, число p при делении на 3 дает остаток 0, 1 или 2, тогда p^2+1 дает в остатке 1, 2 или 2 соответственно, поэтому p^2+1 не делится на 3.

Вычислим по таблице характеров из [39]:

$r = r' = q+1$, $s = s' = q-1$, $t = t' = q^2-q+1$, $d' = 1$, $r'' = 0$, $t'' = q(q-1)/6 = qs/6$, $r'-1 = q$, $1-d' = 0$, $3t''-r''-d' = (q-2)r/2$. Таблица значений характеров χ_{rt}, χ_{r^2s} будет выглядеть так:

Таблица 7. Значения характеров χ_{rt}, χ_{r^2s} группы $U_3(q), q = p^2 > 2$

	C_1	C_2	$C_3^{(l)}$	$C_4^{(k)}$	$C_5^{(k)}$	C_6'	$C_6^{(k,l,m)}$	$C_7^{(k)}$	$C_8^{(k)}$
$\lvert C_i\rvert$	1	rst	qr^2st	q^2t	q^2rst	q^3st	q^3st	q^3rt	q^3r^2s
χ_{rt}	rt	1	1	b	a	0	0	b	0
χ_{r^2s}	r^2s	$-r$	-1	0	0	0	0	0	$E'_{u,k}$
$N(C_i)$	1	1	1	q	q	0	$qs/6$	$(q-2)r/2$	$qs/3$

где $a = \epsilon^{3uk}$, $b = -rA$, $E'_{u,k} = -E_{u,k}$, $\eta^{rs} = 1$.

Лемма 1.2.22. *Пусть* χ_{rt}, χ_{r^2s} *неприводимые характеры группы* $U_3(q)$, $q = p^2 > 2$, *степеней* q^3+1 *и* $(q+1)^2(q-1)$ *соответственно. Тогда* $[\chi^2_{r^2s}, \chi_{rt}] = q+2$.

Доказательство. Вычислим скалярное произведение.

$$[\chi^2_{r^2s}, \chi_{rt}] = \frac{1}{|G|}\Big(r^4s^2rt + r^2rst + qr^2st\Big) = \frac{r^2st}{|G|}\Big(r^3s + r + q\Big) =$$

$$= \frac{1}{q^3}\Big(r(q^3+q^2-q)+q\Big) = \frac{1}{q^2}\Big(r(q^2+q-1)+1\Big) = \frac{1}{q^2}\Big(q^3+2q^2\Big) = q+2.$$

Лемма доказана. □

1.3 Простые неабелевы группы лиева типа

Для простых неабелевых групп лиева типа нам понадобятся значения степеней характера St_L, оценка числа классов сопряженных элементов $k(L)$ и порядок $|\mathrm{Out}(L)|$. Большинство результатов взяты из [27], стр. 491, и [23]. В отдельных случаях использовалась система компьютерной алгебры GAP.

Таблица 8. Значения $St_L(1)$, $k(L)$, $|\mathrm{Out}(L)|$ для простых групп L

L	$St_L(1)$	$k(L)$	$\lvert\mathrm{Out}(L)\rvert$
$L_n(q)$	$q^{n(n-1)/2}$	$\leqslant (6q)^{n-1}$	$2(q-1,n)\log_p q$
$L_2(q)$	q	$q+1, n$ – четное $(q+5)/2, n$ – нечетное	$(2,q-1)\log_p q$
$U_n(q) \cong {}^2L_n(q)$	$q^{n(n-1)/2}$	$\leqslant (6q)^{n-1}$	$2(q+1,n)\log_p q$
$B_n(q),\ n>2$	q^{n^2}	$\leqslant (6q)^n$	$(2,q-1)\log_p q$
$B_2(2^k)$	2^{4k}	$\leqslant (6\cdot 2^k)^2$	$2k$
$C_n(q),\ n>2$	q^{n^2}	$\leqslant (6q)^n$	$(2,q-1)\log_p q$
$D_n(q),\ n>3$	$q^{n(n-1)}$	$\leqslant (6q)^{n-1}$	$2(4,q^n-1)\log_p q, n\geqslant 5$ $6(4,q^n-1)\log_p q, n=4$
$D_4(2)$	2^{12}	53	6
${}^2D_4(2)$	2^{12}	39	2
$G_2(q)$	q^6	$\leqslant (6q)^2$	$2\log_p q, p=3$ $\log_p q, p\neq 3$
$G_2(3)$	3^6	23	2
$F_4(q)$	q^{24}	$\leqslant (6q)^4$	$(2,p)\log_p q$
$E_6(q)$	q^{36}	$\leqslant (6q)^6$	$2(3,q-1)\log_p q$
$E_7(q)$	q^{63}	$\leqslant (6q)^7$	$(2,q-1)\log_p q$
$E_8(q)$	q^{120}	$\leqslant (6q)^8$	$\log_p q$
${}^2B_2(q),\ q=2^{2k+1}$	q^2	$q+3$	$2k+1$
${}^2D_n(q),\ n>3$	$q^{n(n-1)}$	$\leqslant (6q)^{n-1}$	$2(4,q^n+1)\log_p q$
${}^2G_2(q),\ q=3^{2k+1}$	q^3	$q+8$	$2k+1$
${}^2F_4(q),\ q=2^{2k+1}$	q^{12}	$q^2+4q+17$	$2k+1$
${}^2E_6(q)$	q^{36}	$\leqslant (6q)^6$	$2(3,q+1)\log_p q$
${}^2F_4(2)'$	2^{11}	22	2
${}^3D_4(q),\ q>2$	q^{12}	$q^4+q^3+q^2+q+6$	$3\log_p q$
${}^3D_4(2)$	2^{12}	35	3

В дальнейшем нам понадобится дополнительная информация о степени характера St_L, классовом числе и порядке $\mathrm{Out}(L)$ для групп $L_n(q)$, $U_n(q)$, $B_n(q)$ и $C_n(q)$ в некоторых конкретных случаях. Эти значения также получены из [23] и с помощью GAP.

Таблица 9. Значения $k(L), St(1), |\mathrm{Out}(L)|$ для некоторых групп $L_n(q)$

L	$L_3(2)$	$L_3(3)$	$L_3(4)$	$L_3(5)$	$L_3(7)$	$L_3(8)$	$L_3(9)$
$k(L)$	6	12	10	30	22	72	90
$St(1)$	8	27	64	125	343	512	729
$\|\mathrm{Out}(L)\|$	2	2	12	2	6	6	4
L	$L_3(11)$	$L_3(13)$	$L_3(16)$	$L_3(17)$	$L_3(19)$	$L_3(25)$	$L_3(32)$
$k(L)$	132	64	94	306	130	220	1056
$St(1)$	1331	2197	4096	4913	6859	15625	32768
$\|\mathrm{Out}(L)\|$	2	6	24	2	6	12	10
L	$L_3(64)$	$L_4(2)$	$L_4(3)$	$L_4(4)$	$L_4(5)$	$L_5(2)$	$L_7(2)$
$k(L)$	1390	14	29	84	49	27	117
$St(1)$	262144	64	729	4096	15625	1024	2^{21}
$\|\mathrm{Out}(L)\|$	36	2	4	4	8	2	2

Таблица 10. Значения $k(L), St(1), |\mathrm{Out}(L)|$ для некоторых групп $U_n(q)$

L	$U_3(3)$	$U_3(4)$	$U_3(5)$	$U_3(7)$	$U_3(8)$	$U_3(9)$	$U_3(11)$	$U_3(16)$
$k(L)$	14	22	14	58	28	92	48	274
$St(1)$	27	64	125	343	512	729	1331	4096
$\|\mathrm{Out}(L)\|$	2	4	6	2	18	4	6	8
L	$U_3(17)$	$U_3(23)$	$U_3(32)$	$U_3(128)$	$U_4(2)$	$U_4(3)$	$U_5(2)$	$U_7(2)$
$k(L)$	106	188	356	5508	20	20	47	239
$St(1)$	4913	12167	32768	2^{21}	64	729	1024	2^{21}
$\|\mathrm{Out}(L)\|$	6	6	30	42	2	8	4	2

Таблица 11. Значения $St(1),\ k(L), |\mathrm{Out}(L)|$ для некоторых групп $B_n(q), C_n(q)$

L	$B_2(2)'$	$B_2(3)$	$B_2(4)$	$B_2(5)$	$B_2(7)$	$B_2(8)$	$B_2(9)$
$k(L)$	7	20	27	34	52	83	74
$St(1)$	9	81	256	625	2401	4096	6561
$\|\mathrm{Out}(L)\|$	2	2	4	2	2	6	4
L	$B_2(11)$	$B_2(13)$	$B_2(16)$	$B_3(2)$	$B_3(3)$	$C_3(3)$	$B_4(2)$
$k(L)$	100	130	291	30	98	74	81
$St(1)$	14641	28561	65536	512	19683	19683	65536
$\|\mathrm{Out}(L)\|$	2	2	8	1	2	2	1

В следующей таблице приведены значения (некоторые приближенно) порядка, классового числа и порядка группы внешних автоморфизмов спорадических простых групп.

Таблица 12. Значения $|G|, k(G), |\mathrm{Out}(G)|$ для спорадических групп

Группа G	$\|G\|$	$k(G)$	$\|\mathrm{Out}(G)\|$
Матье M_{11}	7920	10	1
Матье M_{12}	95040	15	2
Матье M_{22}	443520	12	2
Матье M_{23}	10200960	17	1
Матье M_{24}	244823040	26	1
Янко J_1	175560	15	1
Янко J_2	604800	21	2
Янко J_3	50232960	21	2
Янко J_4	86775571046077562880	62	1
Конвея Co_1	4157776806543360000	101	1
Конвея Co_2	42305421312000	60	1
Конвея Co_3	495766656000	42	1
Фишера Fi_{22}	64561751654400	65	2
Фишера Fi_{23}	4089470473293004800	98	1
Фишера Fi'_{24}	1255205709190661721292800	108	2
Судзуки Suz	448345497600	43	2
Хельда He	4030387200	33	2
Хигмена-Симса HS	44352000	24	2
Маклафлина McL	898128000	24	2
Харады-Нортона HN	273030912000000	54	2
Томпсона Th	90745943887872000	48	1
Бэби-монстр B	$\approx 4,15478 \cdot 10^{33}$	184	1
Монстр M	$\approx 8,08017 \cdot 10^{53}$	194	1
О'Нэна $O'N$	460815505920	30	2
Рудвалиса Ru	145926144000	36	1
Лайенса Ly	51765179004000000	53	1

1.4 Оценки классового числа

Предложение 1.4.1. Пусть G — конечная простая неабелева группа лиева типа над полем $F = \mathbb{F}_q$, имеющая нескрученный ранг l. Тогда $k(G) \leqslant (6q)^l$. Если $k(G) \geqslant |G|_p$, где p — характеристика поля F, то G изоморфна группе $L_2(q)$ для четного q, причем $k(G) = q+1$, либо $L_2(5)$ (в последнем случае $k(G) = 5$).

Доказательство. См. [32], Теорема 1, Лемма 2.1 и Теорема 2. □

Предложение 1.4.2. Пусть G — конечная простая неабелева группа, изоморфная $L_n(q)$ или $U_n(q)$, где $n \leqslant 6$. Тогда $k(G) \leqslant 2q^{n-1}$, исключая группы $G = U_4(2)$ ($k(G) = 20$) и $G = U_5(2)$ ($k(G) = 47$).

Доказательство. См. [6]. Лемма 3 □

Предложение 1.4.3. Для $n > 12$ верно неравенство $k(S_n) < (2 \cdot \sqrt{3})^{-1/2} \cdot (3/2)^n$.

Доказательство. [36] Лемма 3.2. □

Предложение 1.4.4. Пусть G — подгруппа симметрической группы S_m. Тогда

a) $k(G) \leqslant 3^{(m-1)/2}$, если $m > 2$

b) $k(G) \leqslant 5^{m/4} < (3/2)^m$, если $m \leqslant 12$.

Доказательство. См. [36] теорема 1.1, лемма 3.1 □

Предложение 1.4.5. Пусть G — группа и H — ее подгруппа. Тогда

$$k(H)/|G:H| \leqslant k(G) \leqslant |G:H|k(H).$$

Если H нормальная подгруппа G, то $k(G) \leqslant k(H)k(G/H)$.

Доказательство. См. [26] □

Определение 1.4.6. *Определим для любой группы T параметр $k_0(T)$ как наибольшее из чисел классов сопряженных элементов ее подгрупп, включая и T.*

Для случая абелевой группы T число $k_0(T) = k(T) = |T|$. В большинстве последующих применений $k_0(T)$ не слишком сильно отличается от $k(T)$, а чаще всего будет оценкой сверху для $k(T)$. Удобство этого параметра состоит в его индуктивности: если Y — подгруппа группы X, то $k_0(Y) \leqslant k_0(X)$. Кроме того, как следует из предложения 1.4.5, если Y — нормальная подгруппа X, то $k_0(X) \leqslant k_0(Y)k_0(X/Y)$.

Предложение 1.4.7. Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы X и пусть $k_0(X/K) \leqslant r$. Пусть ψ — неприводимый характер K. Тогда число неприводимых характеров X, лежащих над (сопряженным с) ψ (т.е. такими $\chi \in \mathrm{Irr}(X)$, что $[\chi|_K, \psi] \neq 0$), не превосходит $k_0(I_X(\psi)/K)$. В частности, не больше r.

Доказательство. См. [30], утверждение (A_2'). □

1.5 Свойства SM_m-групп

Определение 1.5.1. *Конечная группа G называется SM_m-группой, если тензорный квадрат любого неприводимого представления разлагается в сумму неприводимых представлений группы G с кратностями, не превосходящими m. Наибольшая кратность среди всех таких разложений называется SM-характеристикой $m_\chi(G)$ группы G.*

Из определения SM_m-группы G получаются неравенства, связывающие степени неприводимых характеров, порядок и классовое число группы G. Эти свойства оказываются очень полезными при отсеве групп не являющимися SM_2-группами, и позволяют получить нижние оценки SM-характеристики.

Лемма 1.5.2. *Пусть G — конечная SM_m-группа. Тогда для любого неприводимого характера χ группы G верно неравенство $\chi(1) \leqslant mk(G)$, где $k(G)$ — число классов сопряженных элементов G.*

Доказательство. Если G — конечная SM_m-группа, то тензорный квадрат любого ее неприводимого представления раскладывается в сумму неприводимых представлений G, с кратностями, не превосходящими m. В частности, если χ_0 — неприводимый характер наибольшей степени, то $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k(G)} m_i\chi_i$, где $0 \leqslant m_i \leqslant m$. Тогда

$$\chi_0(1)^2 = \sum_{i=1}^{k(G)} m_i\chi_i(1) \leqslant m\sum_{i=1}^{k(G)} \chi_i(1) \leqslant m\sum_{i=1}^{k(G)} \chi_0(1) = mk(G)\chi_0(1)$$

откуда получается неравенство $\chi_0(1) \leqslant mk(G)$, что и доказывает лемму. □

Лемма 1.5.3. *Пусть G — конечная SM_m-группа. Тогда $|G| \leqslant m^2k(G)^3$.*

Доказательство. В группе G выберем характер χ_0 наибольшей степени. Используя доказанное в лемме 1.5.2 неравенство, получаем

$$|G| = \sum_{i=1}^{k(G)} \chi_i^2(1) \leqslant \sum_{i=1}^{k(G)} \chi_0^2(1) \leqslant \sum_{i=1}^{k(G)} (mk(G))^2 = m^2 k(G)^3$$

Лемма доказана □

Лемма 1.5.4. *Пусть G — конечная SM_m-группа. Тогда для любого ее неприводимого характера χ выполняется:*

$$\chi^2(1) \leqslant m\sqrt{|G|k(G)}.$$

Доказательство. Пусть G — конечная SM_m-группа. Тогда для любого ее неприводимого характера χ выполняется $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k(G)} m_i\chi_i$, где $0 \leqslant m_i \leqslant m$. Используя неравенство Коши–Буняковского, получаем:

$$\chi^2(1) \leqslant m\sum_{i=1}^{k(G)} \chi_i(1) \leqslant m\sqrt{\sum_{i=1}^{k(G)} \chi_i^2(1) \sum_{i=1}^{k(G)} 1} = m\sqrt{|G|k(G)}.$$

Лемма доказана □

Лемма 1.5.5. *Пусть G — неразрешимая SM_m-группа. Тогда степень любого ее неприводимого характера удовлетворяет неравенству $\chi(1) \leqslant mk(G) - m$.*

Доказательство. Рассмотрим неприводимый характер χ_0 группы G наибольшей степени. Если a — количество неприводимых характеров группы G, имеющих такую же степень, что и χ_0, то можно записать:

$$\chi_0(1)^2 \leqslant m\sum_{i=1}^{k(G)} \chi_i(1) \leqslant ma\chi_0(1) + m(k(G) - a - 1)(\chi_0(1) - 1) + m,$$

где $k(G) - a - 1$ равно количеству неприводимых характеров группы G, степени которых отличны от $\chi_0(1)$ и единицы. В силу предложения 1.2.6, число различных степеней неприводимых характеров неразрешимой группы не меньше 3. Отсюда можно сделать вывод, что $k(G) - a - 1 > 0$. Далее,

$$ma\chi_0(1) + m(k(G) - a - 1)(\chi_0(1) - 1) + m =$$

$$= mk(G)\chi_0(1) - mk(G) - ma - m\chi_0(1) + m + m,$$

откуда

$$\chi_0(1)^2 \leqslant \chi_0(1)(mk(G) - m) + m(1 - (k(G) + a - 1))$$

или

$$\chi_0(1)(\chi_0(1) - mk(G) + m) \leqslant m(1 - (k(G) - a - 1)).$$

Поскольку $\chi_0(1), m > 0$, а правая часть неравенства меньше или равна 0, получаем, что $\chi_0(1) - mk(G) + m \leqslant 0$ или $\chi_0(1) \leqslant mk(G) - m = m(k(G) - 1)$. Лемма доказана □

Лемма 1.5.6. *Пусть $G \cong G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, где G_i — SM_{m_i}-группа. Тогда G— SM_m-группа, где $m = m_1 m_2 \ldots m_n$. Более того, $m_\chi(G) = m_\chi(G_1) m_\chi(G_2) \ldots m_\chi(G_n)$*

Доказательство. Непосредственно следует из предложения 1.2.5 и свойств скалярного произведения характеров. □

Лемма 1.5.7. *Пусть G — SM_m-группа и H — ее нормальная подгруппа. Тогда фактор-группа G/H также является SM_m-группой.*

Полученные свойства служат основным способом отсева групп, не являющихся SM_m-группами. Например, пользуясь результатами леммы 1.5.2, мы можем оценить снизу отношение $\chi_0(1)/k(G) > r$. Полученная оценка будет показывать, что G не является SM_r-группой. Как уже было сказано, основной целью работы было выделить SM_2-группы из списка неразрешимых, но, тем не менее, этот способ подходит и для остальных SM_m-групп.

1.6 Известные SM_m-группы

Здесь приводятся полученные результаты вычислений SM-характеристики для некоторых простых и почти простых групп. Основным инструментом служила функция `SM`, написанная в GAP (см. приложения).

В каждой группе G выбиралась пара неприводимых характеров $\chi_i, \chi_j \in \mathrm{Irr}(G)$, и находилось, с какой кратностью $m_{i,j}$ характер χ_j входит в разложение χ_i^2. Наибольшее значение m среди $m_{i,j}$ равно, по определению, SM-характеристике $m_\chi(G)$ группы G.

Оказалось, что почти для всех рассмотрнных групп значение $m_{i,j}$ будет наибольшим, когда $i = j$, а χ_i — характер максимальной степени. В таблице 13 приводятся рассмотренные группы, указано число $m_\chi(G)$, а также степень характера $\chi(1) = \max \chi_i(1)$.

Таблица 13. Значения $m, \chi(1)$ для почти простых групп

G	$m_\chi(G)$	$\chi(1)$	G	$m_\chi(G)$	$\chi(1)$	G	$m_\chi(G)$	$\chi(1)$
$L_3(3)$	11	39	$\mathrm{Aut}(L_3(3))$	12	52	M_{10}	5	16
$L_3(5)$	20	186	$\mathrm{Aut}(L_3(5))$	39	310	$P\Gamma L_2(9)$	4	20
$L_3(7)$	54	456	$PGL_3(7)$	25	456	$\mathrm{Aut}(L_3(7))$	70	912
$L_4(2)$	16	70	$\mathrm{Aut}(L_4(2))$	17	90	S_6	5	16
$L_5(2)$	189	240	$\mathrm{Aut}(L_5(2))$	321	1860	A_7	17	35
$U_3(3)$	5	32	$P\Gamma U_3(3)$	20	64	A_9	55	216
$U_3(7)$	10	384	$\mathrm{Aut}(U_3(7))$	40	768	A_{10}	99	567
$U_3(8)$	33	567	$\mathrm{Aut}(U_3(8))$	131	1134	A_{11}	613	2310
$U_4(2)$	21	81	$P\Gamma U_4(2)$	14	90	S_7	7	35
$U_5(2)$	125	1215	$\mathrm{Aut}(U_5(2))$	497	2430	S_9	28	216
${}^2B_2(8)$	24	91	${}^2B_2(8) \rtimes C_3$	86	195	S_{10}	117	768
${}^2B_2(32)$	63	1271	${}^2B_2(32) \rtimes C_5$	1560	6355	S_{11}	312	2310
$B_2(4)$	41	340	$B_2(5)$	101	780	$B_3(2)$	91	512

Таблица 14. Значения $m_\chi(G)$, $\chi(1)$ почти простых групп
с цоколем $L_3(4), L_3(8), U_3(4), U_3(5)$

G	$m_\chi(G)$	$\chi(1)$	G	$m_\chi(G)$	$\chi(1)$	G	$m_\chi(G)$	$\chi(1)$
$L_3(4)$	13	64	$L_3(4) \rtimes C_{2_1}$	49	126	$L_3(8)$	23	657
$P\Sigma L_3(4)$	49	126	$L_3(4) \rtimes C_{2_3}$	17	90	$L_3(8).C_2$	76	1314
$PGL_3(4)$	22	39	$L_3(4) \rtimes 2^2$	25	126	$L_3(8).C_3$	170	1971
$P\Gamma L_3(4)$	18	128	$L_3(4) \rtimes D_{12}$	65	252	$L_3(8).6$	437	3504
$L_3(4) \rtimes C_6$	17	126	$L_3(4) \rtimes C_3 \rtimes C_2$	17	128	$P\Sigma U_3(5)$	91	288
$U_3(4)$	7	75	$U_3(4) \rtimes 2$	26	150	$P\Gamma U_3(5)$	32	288
$U_3(5)$	23	144	$PGU_3(5)$	8	144			

Кроме того, точное значение $m_\chi(G)$ было вычислено для каждой из спорадических простых групп и их групп автоморфизмов. Полученные значения представлены в таблице 15.

Для большинства спорадических групп SM-характеристика достаточно велика, в первую очередь это относится к группам Бэби Монстр B и Монстр M. При работе с характерами спорадических групп возникают определенные трудности, главным образом из-за больших порядков этих групп. Здесь существенно упростил задачу пакет AtlasRep в GAP, в котором содержатся таблицы характеров ряда конечных групп, в частности таблицы для спорадических групп. Необходимый синтаксис команд для работы с этим пакетом приведен в приложении.

Таблица 15. Значения $m_\chi(G)$ для спорадических групп

G	$m_\chi(G)$	G	$m_\chi(G)$	G	$m_\chi(G)$
M_{11}	21	Fi_{22}	314914	Aut(M_{12})	28
M_{12}	56	Fi_{23}	42665245	Aut(M_{22})	193
M_{22}	128	Fi'_{24}	30229634167	Aut(J_2)	75
M_{23}	813	Ly	6916215	Aut(J_3)	576
M_{24}	4576	Suz	34364	Aut(Fi_{22})	157588
J_1	52	J_4	328524821	Aut(Fi'_{24})	27596421160
J_2	64	Co_1	40380308	Aut(Suz)	17199
J_3	579	Co_2	217302	Aut(He)	1551
He	3102	HN	743301	Aut(HS)	371
HS	737	Th	76031447	Aut(McL)	5004
McL	1251	$O'N$	27808	Aut(HN)	371658
Co_3	33436	Ru	11482	Aut$(O'N)$	13904
$m_\chi(B) = 1090623755084670$					
$m_\chi(M) = 21458051228477513179513856$					

2 Кратности в разложении квадратов неприводимых представлений почти простых групп с цоколем $L_2(q)$

2.1 Сведения из теории чисел

Лемма 2.1.1. *Пусть α, β — первообразные корни степеней $q-1$ и $q+1$ из 1.*

1) Если q нечетное простое число, то для нечетного j имеем

$$S=\sum_{r=1}^{(q-3)/2}(\alpha^{jr}+\alpha^{-jr})=T=\sum_{s=1}^{(q-1)/2}(\beta^{js}+\beta^{-js})=0.$$

Если j четное, то $S=T=-2$.

2) Если $q=2^t$, то

$$S=\sum_{r=1}^{q/2-1}(\alpha^{ir}+\alpha^{-ir})=T=\sum_{r=1}^{q/2}(\beta^{jr}+\beta^{-jr})=-1.$$

Доказательство. Пусть q нечетно. Легко видеть, что S представляет собой сумму j-х степеней всех корней $(q-1)$-й степени из единицы,за исключением 1^j и $(-1)^j$. Так как сумма j-х степеней всех корней $(q-1)$-й степени из единицы равна нулю при $1\leqslant j<q-1$, то отсюда следует заключение леммы.

Аналогичным образом, получается заключение и для четного q. □

2.2 Группы $L_2(q)$

Лемма 2.2.1. *Пусть $G\cong L_2(q),\ q=2^n\geqslant 4$. Тогда $m_\chi(G)=2$.*

Доказательство. Группа $L_2(2)$ изоморфна симметрической группе S_3, которая разрешима. Простая проверка показывает, что S_3 — ASR-группа.

При $q=4$ группа $L_2(q)$ изоморфна знакопеременной группе A_5. Эта, группа, как несложно убедиться, является SM_2-группой.

Далее будем считать, что $q\geqslant 8$. Обратимся к таблице 2. В таблице присутствуют единичный характер, характер Стейнберга, и два семейства характеров φ_i $(1\leqslant i\leqslant q/2-1)$ степени $q+1$ и ζ_j $(1\leqslant j\leqslant q/2)$ степени $q-1$. Зная, что $\sum\limits_{r=1}^{q/2-1}(\alpha^{ir}+\alpha^{-ir})=-1$, а $\sum\limits_{s=1}^{q/2}(-\beta^{js}-\beta^{-js})=1$, найдем необходимые скалярные произведения. Для дальнейшего использования, вычислим суммы:

$$s^2 = \sum_{r=1}^{q/2-1} (\alpha^{ir} + \alpha^{-ir})^2 = \sum_{r=1}^{q/2-1} (\alpha^{2ir} + \alpha^{-2ir}) + 2 \sum_{r=1}^{q/2-1} 1 = q - 3$$

$$t^2 = \sum_{s=1}^{q/2} (-\beta^{js} - \beta^{-js})^2 = \sum_{s=1}^{q/2} (\beta^{2js} + \beta^{-2js}) + 2 \sum_{s=1}^{q/2} 1 = q - 1$$

Тогда

$$[St^2, St] = \frac{q^3 + q(q+1)(q/2-1) - q(q-1)q/2}{q(q^2-1)} = \frac{q^2 + \frac{q^2}{2} - \frac{q}{2} - 1 - \frac{q^2}{2} + \frac{q}{2}}{q^2-1} = 1$$

$$[St^2, \varphi_i] = \frac{(q+1)q^2 - q(q+1)}{q(q^2-1)} = 1$$

$$[St^2, \zeta_j] = \frac{(q-1)q^2 + q(q-1)}{q(q^2-1)} = 1$$

Кратность вхождения главного характера в разложение St^2 определим из равенства:

$$St^2(1) = St(1) + \sum_{i=1}^{(q-2)/2} \varphi_i(1) + \sum_{j=1}^{q/2} \zeta_j(1) + t1_G(1)$$

или

$$q^2 = q + \frac{q-2}{2}(q+1) + \frac{q}{2}(q-1) + t.$$

Отсюда получаем, что $t = 1$.

Далее,

$$[\varphi_i^2, 1_G] = \frac{(q+1)^2 + q^2 - 1 + q(q+1)s^2}{q(q^2-1)} = \frac{q+1+q-1+q^2-3q}{q(q-1)} = 1$$

$$[\varphi_i^2, St] = \frac{(q+1)^2 q + q(q+1)s^2}{q(q^2-1)} = \frac{q+1+q-3}{q-1} = 2$$

$$[\varphi_i^2, \zeta_j] = \frac{(q+1)^2(q-1) - (q^2-1)}{q(q^2-1)} = \frac{q+1-1}{q} = 1$$

$$[\zeta_j^2, 1_G] = \frac{(q-1)^2 + q^2 - 1 + q(q-1)t^2}{q(q^2-1)} = \frac{q-1+q+1+q^2-q}{q(q+1)} = 1$$

$$[\zeta_j^2, St] = \frac{(q-1)^2 q - q(q-1)t^2}{q(q^2-1)} = \frac{q-1-(q-1)}{q+1} = 0$$

$$[\zeta_j^2, \varphi_i] = \frac{(q-1)^2(q+1) + (q^2-1)}{q(q^2-1)} = \frac{q-1+1}{q} = 1$$

Осталось рассмотреть еще два скалярных произведения: $[\varphi_i^2, \varphi_k]$ и $[\zeta_j^2, \zeta_l]$.

$$[\varphi_i^2, \varphi_k] = \frac{(q+1)^3 + (q^2-1) + q(q+1)s'^3}{q(q^2-1)} = \frac{(q+1)^2 + q - 1 + qs'^3}{q(q-1)} = \frac{q+3+s'^3}{q-1},$$

где $s'^3 = \sum\limits_{r=1}^{q/2-1} (\alpha^{ir} + \alpha^{-ir})^2(\alpha^{kr} + \alpha^{-kr}) = \sum\limits_{r=1}^{q/2-1} (\alpha^{2ir} + 2 + \alpha^{-2ir})(\alpha^{kr} + \alpha^{-kr}) =$
$= \sum\limits_{r=1}^{q/2-1} (\alpha^{(2i+k)r} + \alpha^{(2i-k)r} + \alpha^{-(2i-k)r} + \alpha^{-(2i+k)r}) + 2\sum\limits_{r=1}^{q/2-1} (\alpha^{kr} + \alpha^{-kr}).$

Если $2i = k$ в F_q, то $s'^3 = \sum\limits_{r=1}^{q/2-1} 2 + \sum\limits_{r=1}^{q/2-1} (\alpha^{(2i+k)r} + \alpha^{-(2i+k)r}) - 2 = q - 5.$

То же значение получается и в случае $2i = -k$ в F_q.

Тогда $[\varphi_i^2, \varphi_k] = (q + 3 + q - 5)/(q - 1) = 2.$

Если же $2i \neq \pm k$ в F_q, то $s'^3 = -4$, и в этом случае $[\varphi_i^2, \varphi_k] = (q + 3 - 4)/(q - 1) = 1.$

Количество характеров φ_k, входящих в разложение φ_i^2 можно определить из соотношения:

$$(q+1)^2 = 2q + 2s(q+1) + t(q+1) + \frac{q}{2}(q-1) + 1,$$

где s и t — числа, равные количеству характеров φ_k, входящих в разложение φ_i^2 с кратностями 2 и 1 соответственно. Учитывая, что $s + t = \dfrac{q-2}{2}$, мы приходим к равенству:

$$(q+1)^2 = 2q + (q - 2 - 2t)(q+1) + t(q+1) + \frac{q}{2}(q-1) + 1$$

после преобразования которого, получаем:

$$q^2 = (q - 2 - t)(q+1) + \frac{q}{2}(q-1)$$

или:

$$\frac{q^2}{2} = qt + \frac{3q}{2} + 2 + t.$$

Представим теперь $t = Aq + B$. Тогда:

$$\frac{q^2}{2} = (Aq+B)q + \frac{3q}{2} + 2 + Aq + b = Aq^2 + (A + B + \frac{3}{2})q + (B+2).$$

Отсюда легко находятся $A = \dfrac{1}{2}$ и $B = -2$. Таким образом, $t = \dfrac{q}{2} - 2$ и $s = 1$.

Теперь вычислим скалярное произведение $[\zeta_j^2, \zeta_l]$:

$$[\zeta_j^2, \zeta_l] = \frac{(q-1)^3 - (q^2-1) + q(q-1)t'^3}{q(q^2-1)} = \frac{(q-1)^2 - (q+1) + qt'^3}{q(q+1)} = \frac{q-3+t'^3}{q+1}, \text{ где}$$

$t'^3 = \sum\limits_{s=1}^{q/2} (-\beta^{js} - \beta^{-js})^2(-\beta^{ls} - \beta^{-ls}) = \sum\limits_{s=1}^{q/2} (\beta^{2js} + 2 + \beta^{-2js})(-\beta^{ls} - \beta^{-ls}) =$
$= \sum\limits_{s=1}^{q/2} (-\beta^{(2j+l)s} - \beta^{(2j+l)s} - \beta^{-(2j-l)s} - \beta^{-(2j+l)s}) + 2\sum\limits_{s=1}^{q/2} (-\beta^{ls} - \beta^{-ls}).$

Действуя аналогичным образом, получаем $t'^3 = 3 - q$ при $2j = \pm l$ в F_q, что дает $[\zeta_j^2, \zeta_l] = (q - 3 + 3 - q)/(q + 1) = 0$.

В остальных случаях $t'^3 = 4$, и $[\zeta_j^2, \zeta_l] = (q - 3 + 4)/(q + 1) = 1$.

Для определения количества характеров ζ_l, входящих в разложение ζ_j^2 с кратностями 0 и 1, поступим как и ранее. Из равенства

$$(q-1)^2 = \frac{q-2}{2}(q+1) + t(q-1) + 1$$

мы получаем

$$\frac{q^2}{2} - \frac{3}{2}q + 1 = tq - t.$$

Представив $t = Aq + B$, мы получаем

$$\frac{q^2}{2} - \frac{3}{2}q + 1 = Aq^2 + (B - A)q - B,$$

откуда легко определить, что $t = \dfrac{q}{2} - 1$. Поэтому, характер ζ_l, входящий в ζ_j^2 с кратностью 0 будет всего один, а оставшихся будет $\dfrac{q}{2} - 1$.

Видно, что наибольшее значение скалярного произведения, например для пары характеров φ_i^2 и St, будет равно 2. Следовательно, наибольшая кратность будет равна 2, что и доказывает лемму. □

Лемма 2.2.2. *Группа $L_2(q)$, для нечетных $q > 5$ не является SM_2-группой.*

Доказательство. Убедимся сначала, что $L_2(3)$ и $L_2(5)$ — SM_2-группы. Существует изоморфизм $L_2(3)$ в знакопеременную группу A_4, которая разрешима и $m_\chi(A_4) = 2$.

Далее, в силу изоморфизма $L_2(5) \cong L_2(4)$, SM-характеристика $m_\chi(L_2(5)) = 2$.

Пусть теперь $q > 5$. Заметим, что в случае нечетных q порядок группы $L_2(q)$ равен $q(q^2-1)/2$. Пусть $G = L_2(q)$ для $q = 4k+1$. Обратившись к таблице 3, вычислим скалярное произведение

$$[\theta^2, St] = \frac{(q+1)^2 q + sq(q+1) + tq(q+1)/2}{q(q^2-1)/2} = \frac{2(q+1)^2 q + (2s+t)q(q+1)}{q(q^2-1)},$$

где $s = \sum\limits_{r=1}^{k-1} (\alpha^r + \alpha^{-r})^2$, а $t = (\alpha^k + \alpha^{-k})^2 = 4$.

Вычислим $s = \sum\limits_{r=1}^{k-1} (\alpha^r + \alpha^{-r})^2 = \sum\limits_{r=1}^{k-1} (\alpha^{2r} + \alpha^{-2r}) + \sum\limits_{r=1}^{k-1} 2 = \sum\limits_{r=1}^{k-1} \alpha^{2r} + \sum\limits_{r=1}^{k-1} \alpha^{-2r} + 2k - 2$, далее, учитывая, что порядок α равен $(q-1)/2 = k$, получаем, что $s = 2k - 4 = (q-9)/2$, откуда $2s + t = q - 5$. Подставим значение s в скалярное произведение:

$$[\theta^2, St] = \frac{2(q+1)^2q + q(q+1)(q-5)}{q(q^2-1)} = \frac{q(q+1)(2q+2+q-5)}{q(q^2-1)} = 3$$

Если $G = L_2(q)$ для $q = 4k+3$, то, рассмотрев пару характеров из таблицы 4, можно посчитать их скалярное произведение

$$[\theta^2, St] = \frac{(q+1)^2q + sq(q+1)}{q(q^2-1)/2} = \frac{2(q+1)^2q + 2sq(q+1)}{q(q^2-1)},$$

где $s = \sum\limits_{r=1}^{k} (\alpha^r + \alpha^{-r})^2$. Учитывая, что порядок α равен $(q-1)/2 = 2k+1$, вычислим s как и в предыдущем случае:

$s = \sum\limits_{r=1}^{k} (\alpha^{2r} + \alpha^{-2r}) + \sum\limits_{r=1}^{k} 2 = -1 + 2k = (q-5)/2.$

При подстановке в скалярное произведение, получаем

$$[\theta^2, St] = \frac{2(q+1)^2q + q(q+1)(q-5)}{q(q^2-1)} = 3.$$

Мы получили, что в группе G существует пара характеров θ и St, таких, что кратность вхождения характера St в θ^2 равна трем. То есть SM-характеристика $m_\chi(L_2(q))$, для нечетных q, будет не меньше трех. Лемма доказана. □

2.3 Группы $PGL_2(q)$ для нечетных q

Лемма 2.3.1. *Группы $PGL_2(q)$ являются SM_2-группами.*

Доказательство. При $q = 2$ и 3 группы $PGL_2(q)$ изоморфны симметрическим группам S_3 и S_4 соответственно. Эти группы разрешимы и, как показывает простая проверка — ASR-группы. Считаем далее, что $q > 3$. Если q — четное, то $PGL_2(q) \cong L_2(q)$, и, следовательно, является SM$_2$-группой.

Пусть q — нечетное. Обратимся к таблице 5 и вычислим необходимые скалярные произведения.

Для дальнейших вычислений понадобятся следующие значения сумм:

$S^{(2)} = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} \left(\alpha^{ir} + \alpha^{-ir}\right)^2 = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} \left(\alpha^{2ir} + \alpha^{-2ir} + 2\right) = q - 5$

$T^{(2)} = \sum_{s=1}^{(q-1)/2} \left(-\beta^{js} - \beta^{-js}\right)^2 = \sum_{s=1}^{(q-1)/2} \left(\beta^{2js} + \beta^{-2js} + 2\right) = q - 3$

Тогда

$$[\varphi_i^2, St] = \frac{(q+1)^2q + q(q+1)S^{(2)} + 2q(q+1)}{q(q^2-1)} = \frac{q+1+q-3}{q-1} = 2$$

$$[\zeta_j^2, St] = \frac{(q+1)^2 q - q(q-1)T^{(2)} - 2q(q-1)}{q(q^2-1)} = \frac{(q+1)^2 - (q-1)(q-3-2)}{q^2-1} = 0$$

Далее

$$[\varphi_i^2, \zeta_j] = \frac{(q+1)^2(q-1) - (q^2-1)}{q(q^2-1)} = 1,$$

$$[\zeta_j^2, \varphi_i] = \frac{(q-1)^2(q+1) + (q^2-1)}{q(q^2-1)} = 1,$$

$$[SgnSt^2, St] = [St^2, St] = \frac{q^3 + \frac{q(q+1)(q-3)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} - \frac{q(q-1)(q-1)}{2} - \frac{q(q-1)}{2}}{q(q^2-1)} = 1,$$

и

$$[SgnSt^2, \varphi_i] = [St^2, \varphi_i] = \frac{q^2(q+1) + q(q+1)S + q(q+1)(-1)^i}{q(q^2-1)},$$

где $S = \sum_{r=1}^{(q-3)/2}(\alpha^{jr} + \alpha^{-jr})$. В лемме 2.1.1 было доказано, что $S = 0$ для нечетного i и $S = -2$ для i четного. В каждом из этих случаев значение скалярного произведения равно:

$$[SgnSt^2, \varphi_i] = [St^2, \varphi_i] = \frac{(q+1)^2(q-1) - (q^2-1)}{q(q^2-1)} = 1.$$

Далее,

$$[SgnSt^2, \zeta_j] = [St^2, \zeta_j] = \frac{q^2(q-1) + q(q-1)T + q(q-1)(-1)^{j+1}}{q(q^2-1)},$$

где $T = \sum_{s=1}^{(q-1)/2}(\beta^{js} + \beta^{-js}) = 0$. Также, при четном и нечетном j получаем

$$[SgnSt^2, \zeta_j] = [St^2, \zeta_j] = \frac{q^2(q-1) + q(q-1)}{q(q^2-1)} = 1.$$

Рассмотрим теперь скалярное произведение $[St^2, SgnSt]$:

$$[St^2, SgnSt] = \frac{q^3 + q(q+1)I + \frac{q(q+1)}{2}(-1)^{(q-1)/2} + q(q-1)J + \frac{q(q-1)}{2}(-1)^{(q-1)/2}}{q(q^2-1)},$$

где $I = \sum_{r=1}^{(q-3)/2}(-1)^r$, $J = \sum_{s=1}^{(q-1)/2}(-1)^{s+1} = -\sum_{s=1}^{(q-1)/2}(-1)^s$.

При $q = 4k+1$ получаем: $I = -1$, $J = 0$ и, значит

$$[SgnSt^2, SgnSt] = [St^2, SgnSt] = \frac{q^3 - q(q+1) + \frac{q(q+1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2}}{q(q^2-1)} = 1.$$

При $q = 4k+3$, $I = 0, J = 1$, следовательно,

$$[SgnSt^2, SgnSt] = [St^2, SgnSt] = \frac{q^3 - \frac{q(q+1)}{2} + q(q-1) - \frac{q(q-1)}{2}}{q(q^2-1)} = 1.$$

Вычислим скалярное произведение $[\varphi_i^2, \varphi_k]$:

$$[\varphi_i^2, \varphi_k] = \frac{(q+1)^3 + (q^2-1) + q(q+1)S^{(3)} + 4q(q+1)(-1)^k}{q(q^2-1)},$$

где $S'^{(3)} = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{ir} + \alpha^{-ir})^2(\alpha^{kr} + \alpha^{-kr}) = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{2ir} + 2 + \alpha^{-2ir})(\alpha^{kr} + \alpha^{-kr}) =$
$= \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{(2i+k)r} + \alpha^{(2i-k)r} + \alpha^{-(2i-k)r} + \alpha^{-(2i+k)r}) + 2\sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{kr} + \alpha^{-kr})$.

Если $2i = k$ в F_q, то $S^{(3)} = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} 2 + \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{(2i+k)r} + \alpha^{-(2i+k)r}) - 4 = q - 9$.

То же значение получается и в случае $2i = -k$ в F_q. Тогда

$$[\varphi_i^2, \varphi_k] = \frac{(q+1)^3 + (q^2-1) + q(q+1)(q-9) + 4q(q+1)}{q(q^2-1)} = 2$$

Если же $2i \neq \pm k$ в F_q, то $S^{(3)} = -2 - 2 - 4 = -8$, и в этом случае

$$[\varphi_i^2, \varphi_k] = \frac{(q+1)^3 + (q^2-1) - 8q(q+1) + 4q(q+1)}{q(q^2-1)} = 1.$$

Если k нечетно, то $S^{(3)} = 0$, и тогда

$$[\varphi_i^2, \varphi_k] = \frac{(q+1)^3 + (q^2-1) - 4q(q+1)}{q(q^2-1)} = 1.$$

Теперь рассмотрим $[\zeta_j^2, \zeta_l]$:

$$[\zeta_j^2, \zeta_l] = \frac{(q-1)^3 - (q^2-1) + q(q-1)T^{(3)} + 4q(q-1)(-1)^{3j+3}}{q(q^2-1)},$$

где

$T^{(3)} = \sum_{s=1}^{(q-1)/2} (-\beta^{js} - \beta^{-js})^2(-\beta^{ls} - \beta^{-ls}) = \sum_{s=1}^{(q-1)/2} (\beta^{2js} + 2 + \beta^{-2js})(-\beta^{ls} - \beta^{-ls}) =$
$= \sum_{s=1}^{(q-1)/2} (-\beta^{(2j+l)s} - \beta^{(2j+l)s} - \beta^{-(2j-l)s} - \beta^{-(2j+l)s}) + 2\sum_{s=1}^{q/2} (-\beta^{ls} - \beta^{-ls})$.

Действуя аналогичным образом, получаем $T^{(3)} = 7 - q$ при $2j = \pm l$ в F_q, что дает

$$[\zeta_j^2, \zeta_l] = \frac{(q-1)^3 - (q^2-1) + q(q-1)(7-q) + 4q(q-1)}{q(q^2-1)} = 0.$$

Для четных l в остальных случаях $T^{(3)} = 8$, и

$$[\zeta_j^2, \zeta_l] = \frac{(q-1)^3 - (q^2-1) + 8q(q-1) - 4q(q-1)}{q(q^2-1)} = 1.$$

Если l нечетное, то $T^{(3)} = 0$, и

$$[\zeta_j^2, \zeta_l] = \frac{(q-1)^3 - (q^2-1) + 4q(q-1)}{q(q^2-1)} = 1.$$

Осталось рассмотреть два скалярных произведения: $[\varphi_i^2, SgnSt]$ и $[\zeta_j^2, SgnSt]$.

$$[\varphi_i^2, SgnSt] = \frac{q(q+1)^2 + q(q+1)S'^{(2)} + 2q(q+1)(-1)^{(q-1)/2}}{q(q^2-1)},$$

где $S'^{(2)} = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{ir} + \alpha^{-ir})^2 (-1)^r = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{2ir} + \alpha^{-2ir} + 2)(-1)^r$

Поскольку α — элемент порядка $q-1$, то $(-1)^r = \alpha^{r(q-1)/2} = \alpha^{-r(q-1)/2}$. Отсюда $S'^{(2)} = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{((q-1)/2+2i)s} + \alpha^{-((q-1)/2+2i)s}) + 2\sum_{r=1}^{(q-3)/2} (-1)^r$.

Если $q = 4k+3$, то обе суммы равны 0, следовательно, и $S'^{(2)} = 0$. Если $q = 4k+1$, то $S'^{(2)} = -4$. В каждом из этих случаев получаем:

$$[\varphi_i^2, SgnSt] = \frac{q(q+1)^2 - 2q(q-1)}{q(q^2-1)} = 1.$$

Для $[\zeta_j^2, SgnSt]$ рассуждения похожие:

$$[\zeta_j^2, SgnSt] = \frac{q(q-1)^2 + q(q-1)T'^{(2)} + 2q(q-1)(-1)^{(q-1)/2}}{q(q^2-1)},$$

где $T'^{(2)} = \sum_{s=1}^{(q-1)/2} (-\beta^{js} - \beta^{-js})^2 (-1)^{s+1} = -\sum_{s=1}^{(q-1)/2} (\beta^{2js} + \beta^{-2js} + 2)(-1)^s$.

Поскольку β — элемент порядка $q+1$, то $(-1)^s = \beta^{s(q+1)/2} = \beta^{-s(q+1)/2}$. Отсюда $T'^{(2)} = -\sum_{s=1}^{(q-1)/2} (-\beta^{((q+1)/2+2j)s} - \beta^{-((q+1)/2+2j)s}) - 2\sum_{s=1}^{(q-1)/2} (-1)^s$.

Если $q = 4k+1$, то обе суммы равны 0. следовательно, и $T'^{(2)} = 0$. Если $q = 4k+3$, то $T'^{(2)} = 4$. В каждом из этих случаев получаем

$$[\zeta_j^2, SgnSt] = \frac{q(q-1)^2 + 2q(q-1)}{q(q^2-1)} = 1$$

Лемма доказана. □

2.4 Почти простые группы с цоколем $L_2(q)$

Наша задача теперь — доказать, что среди остальных почти простых групп с цоколем $L_2(q)$ не существует других SM_2-групп.

Заметим, что если q — нечетное простое число, то $\mathrm{Aut}(L_2(q)) \cong PGL_2(q)$, и единственной почти простой группой, кроме $L_2(q)$, будет $PGL_2(q)$, что и доказывает наше предположение.

Пусть $q = p^t$, где p нечетное простое число, и $L \cong L_2(q) < G \leqslant \mathrm{Aut}(L_2(q))$

Из утверждения 1.2.20 следует, что для любого автоморфизма γ порядка $e > 1$ группы $L_2(q)$, индуцированного автоморфизмом поля $\mathbb{F}_q$, в группе L найдутся e неприводимых сопряженных характеров φ_i, степени $q+1$, таких, что группа $PGL_2(q)$ будет группой инерции для каждого из них.

Пусть $G \cong L.<\gamma>$. Автоморфизм γ имеет точную орбиту на множестве характеров φ_i, следовательно, по утверждению 1.2.16, $\varphi_i^G = \chi$, где χ — неприводимый характер группы G степени $(q+1)e$.

Пусть теперь $G \cong PGL_2(q).<\gamma>$. Рассуждая таким же образом, мы приходим к выводу, что в группе G найдется неприводимый характер χ степени $(q+1)e$, такой, что $\chi = \varphi_i^G$, где $\varphi_i \in \mathrm{Irr}(PGL_2(q))$ — сопряженные характеры степени $(q+1)$.

Если $q = 2^t$, то $L_2(q) \cong PGL_2(q)$, поэтому рассуждения здесь аналогичны тем, что выше.

Выясним, с какой кратностью характер χ входит в разложение χ^2. Для этого рассмотрим скалярное произведение $[\chi^2, \chi]_G = [\chi^2, \varphi_i^G]_G$. По теореме взаимности Фробениуса и утверждению 1.2.16:

$$[\chi^2, \varphi_i^G]_G = [\chi^2|_L, \varphi_1]_L = \left[\left(\sum_{i=1}^{e}\varphi_i\right)^2, \varphi_1\right]_L = \sum_{i=1}^{e}\left[\varphi_i^2, \varphi_1\right]_L.$$

Для оценки $[\chi^2, \chi]$ мы будем вычислять значения $[\varphi_i^2, \varphi_1]_L$, где L изоморфна $L_2(q)$ или $PGL_2(q)$.

Утверждение 1.2.16 не верно, когда $q = 4, 5$ или 9, поскольку у групп $L_2(4)$ и $L_2(9)$ неприводимый характер степени $q+1$ всего один, а у группы $L_2(5)$ такого характера нет.

Известно, что $L_2(4) \cong L_2(5) \cong A_5$, поэтому единственной почти простой группой, кроме $L_2(5)$ здесь будет только группа $PGL_2(5)$.

Пусть теперь $L \cong L_2(9)$. Докажем, что ни одна группа G, $L < G \leqslant \mathrm{Aut}(L)$ не является SM_2-группой. В нашем случае G может быть одной из групп: M_{10}, S_6, $P\Gamma L_2(9)$ и $PGL_2(9)$. Используя функцию `SM` в GAP (см. приложения), мы получили, что SM-характеристика $m_\chi(M_{10}) = m_\chi(S_6) = 5$, а $m_\chi(P\Gamma L_2(9)) = 4$.

Лемма 2.4.1. *Пусть $L \cong L_2(q), q = 2^t$. Тогда G не является SM_2-группой, и $m_\chi(G) \geqslant e+1$.*

Доказательство. Вычислим значение $[\varphi_i^2, \varphi_1]$, пользуясь таблицей 2: $[\varphi_i^2, \varphi_1] = \dfrac{q+3+S}{q-1}$, где

$$S = \sum_{r=1}^{q/2-1}(\alpha^{ir}+\alpha^{-ir})^2(\alpha^r+\alpha^{-r}) = \sum_{r=1}^{(q-3)/2}(\alpha^{2ir}+2+\alpha^{-2ir})(\alpha^r+\alpha^{-r}) =$$

$$= \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{(2i+1)r} + \alpha^{-(2i+1)r}) + \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{(2i-1)r} + \alpha^{-(2i-1)r}) + 2 \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^r + \alpha^{-r}).$$

Рассмотрим ситуацию, когда $2i+1 = q-1$ или $2i-1 = q-1$. В первом случае $i = (q-2)/2$, а $-i = q-1-i = q/2$. Если же $2i-1 = q-1$, то $i = q/2$, а $-i = q-1-i = (q-2)/2$. То есть такая ситуация возможна только в одном случае, когда $i = q/2$.

$$S = \sum_{r=1}^{q/2-1} 2 + \sum_{r=1}^{q/2-1} (\alpha^{(2i+1)r} + \alpha^{-(2i+1)r}) - 2 = q-5,$$

и $[\varphi_i^2, \varphi_1] = \dfrac{q+3+q-5}{q-1} = 2.$

Если же i не равно $\pm q/2$, то $S = -4$, и тогда $[\varphi_i^2, \varphi_1] = \dfrac{q-3+4}{q-1} = 1.$

Таким образом, одно из слагаемых в сумме $\sum_{i=1}^{e} [\varphi_i^2, \varphi_1]$ равно 2, а остальные $e-1$ равны 1, следовательно, значение суммы равно $e+1$. Лемма доказана. □

Лемма 2.4.2. *Пусть $L \cong PGL_2(q), q = p^t, p > 2$ и $L < G \leqslant \mathrm{Aut}(L)$. Тогда G не является SM_2-группой.*

Доказательство. Вычислим значение $[\varphi_i{}^2, \varphi_1]$, пользуясь таблицей 5.

$$[\varphi_i^2, \varphi_1] = \frac{(q+1)^3 + (q^2-1) + q(q+1)S - 4q(q+1)}{q(q^2-1)} = \frac{q^2+qS-q}{q(q-1)} = \frac{q-1+S}{q-1},$$

$$S = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{ir} + \alpha^{-ir})^2 (\alpha^r + \alpha^{-r}) = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{2ir} + 2 + \alpha^{-2ir})(\alpha^r + \alpha^{-r}) =$$

$$= \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{(2i+1)r} + \alpha^{-(2i+1)r}) + \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{(2i-1)r} + \alpha^{-(2i-1)r}) + 2 \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^r + \alpha^{-r}).$$

Поскольку каждое из чисел $\pm(2i+1)$,$\pm(2i-1)$ — нечетное, то каждая из трех сумм будет равна 0, и тогда $[\varphi_i^2, \varphi_1] = 1$. Таким образом, сумма $\sum_{i=1}^{e} [\varphi_i^2, \varphi_1]$ равна e, что при $e > 2$ доказывает лемму.

Пусть теперь $e = 2$. Тогда

$$[\chi^2, \varphi_1^G] = [(\varphi_1 + \varphi_2)^2, \varphi_1] = [\varphi_1^2, \varphi_1] + 2[\varphi_1\varphi_2, \varphi_1] + [\varphi_2^2, \varphi_1] = 2 + 2[\varphi_1\varphi_2, \varphi_1].$$

Значение $[\varphi_1\varphi_2, \varphi_1]$ считается так же, как и ранее:

$$[\varphi_1\varphi_2, \varphi_1] = \frac{(q+1)^3 + (q^2-1) + q(q+1)S^{(1)} - 4q(q+1)}{q(q^2-1)} = \frac{q-1+S^{(1)}}{q-1},$$

$$S^{(1)} = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^r + \alpha^{-r})(\alpha^{ir} + \alpha^{-ir})(\alpha^r + \alpha^{-r}) = \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{2r} + 2 + \alpha^{-2r})(\alpha^{ir} + \alpha^{-ir}) =$$

$$= \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{(2+i)r} + \alpha^{-(2+i)r}) + \sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{(2-i)r} + \alpha^{-(2-i)r}) + 2\sum_{r=1}^{(q-3)/2} (\alpha^{ir} + \alpha^{-ir}).$$

Характеры φ_1 и φ_2 сопряжены, поэтому $i = p$. По условию леммы p — нечетное число, поэтому $S^{(1)} = 0$, и, следовательно, $[\varphi_1\varphi_2, \varphi_1] = 1$.

Мы получили, что скалярное произведение $[\chi^2, \varphi_1^G] = 2 + 2[\varphi_1\varphi_2, \varphi_1] = 4$, то есть G не является SM_2-группой. Лемма доказана. □

Лемма 2.4.3. *Пусть $L \cong L_2(q)$, где q – нечетное. Тогда G не является SM_2-группой, и $m_\chi(G) \geqslant 2e$.*

Доказательство. Пусть $q = 4k + 1$. Вычислим значение $[\varphi_i{}^2, \varphi_1]$, пользуясь таблицей 3:

$$[\varphi_i{}^2, \varphi_1] = \frac{(q+1)^3 + q^2 - 1 + q(q+1)(S_1 + T/2)}{q(q^2-1)/2} =$$

$$= \frac{(q+1)^2 + q - 1 + q(S_1 + T/2)}{q(q-1)/2} = \frac{(2q + 6 + 2S_1 + T)}{q-1},$$

где

$$S_1 = \sum_{r=1}^{k-1}(\alpha^{(2i+1)r} + \alpha^{-(2i+1)r}) + \sum_{r=1}^{k-1}(\alpha^{(2i-1)r} + \alpha^{-(2i-1)r}) + 2\sum_{r=1}^{k-1}(\alpha^r + \alpha^{-r}).$$

$$T = (\alpha^{ik} + \alpha^{-ik})^2(\alpha^k + \alpha^{-k}) = \alpha^{(2i+1)k} + \alpha^{-(2i+1)k} + \alpha^{(2i-1)k} + \alpha^{-(2i-1)k} + 2(\alpha^k + \alpha^{-k}).$$

Порядок α равен $(q-1)/2 = 2k$, поэтому $\alpha^k = 1$, следовательно, $(\alpha^{tk} + \alpha^{-tk})$, для $t \neq (q-1)/2$.

Если $2i + 1 = (q+1)/2$, то $i = (q+3)/4 = k - 1/2$, что невозможно.

Если $2i - 1 = (q-1)/2$, то $i = k + 1/2$, что также невозможно.

Таким образом, $T = 8$, а $S_1 = 0$, и тогда

$$[\varphi_i{}^2, \varphi_1] = \frac{2q + 6 - 8}{q-1} = 2.$$

Мы получили, что все слагаемые в сумме равны 2, следовательно, $\sum_{i=1}^{e} [\varphi_i^2, \varphi_1] = 2e > 2$.

Пусть теперь $q = 4k + 3$. Тогда, по таблице 4:

$$[\varphi_i{}^2, \varphi_1] = \frac{(q+1)^3 + q^2 - 1 + q(q+1)S_1}{q(q^2-1)/2} = \frac{(q + 3 + S_1)}{(q-1)/2},$$

где

$$S_1 = \sum_{r=1}^{k}(\alpha^{(2i+1)r} + \alpha^{-(2i+1)r}) + \sum_{r=1}^{k}(\alpha^{(2i-1)r} + \alpha^{-(2i-1)r}) + 2\sum_{r=1}^{k}(\alpha^{r} + \alpha^{-r}) = -4.$$

Значит,

$$[{\varphi_i}^2, \varphi_1] = \frac{(q-1)}{(q-1)/2} = 2,$$

и тогда сумма $\sum_{i=1}^{e}[\varphi_i^2, \varphi_1] = 2e > 2$, то есть G — как минимум SM_3-группа. Лемма доказана. □

Подводя итог вышесказанному, сформулируем полученные результаты в виде теоремы

Теорема 2.4.4. *Среди почти простых групп с цоколем, изоморфным группе $L_2(q)$ только группы $PGL_2(q)$ и A_5 являются SM_2-группами.*

3 Простые неабелевы SM_2-группы

Для определения того, к какому классу SM_m-групп принадлежит простая неабелева группа L мы будем, как было сказано выше, пользоваться свойствами, доказанными в леммах 1.5.2–1.5.5. Наиболее полезной оказывается последняя лемма, поскольку с ее помошью получается лучшая оценка SM-характеристики простой неабелевой группы L.

По имеющейся информации о степенях характеров и классовом числе группы L оценим значение $m(L)$ отношения $\chi(1)/(k(L)-1)$ для выбранного характера $\chi \in \mathrm{Irr}(L)$. Если окажется, что $m(L)$ строго больше некоторого числа r, то, в силу леммы 1.5.5, SM-характеристика $m_\chi(L) > r$ и, следовательно, L не SM_r-группа. В противном случае потребуется более детальное исследование.

3.1 Классические простые группы лиева типа

Лемма 3.1.1. *Среди классических простых групп лиева типа к SM_2-группам относятся только группы $L_2(q)$, $q = 2^t$.*

Доказательство. Доказательство разобъем на три части. В первой будут рассматриваться группы $L_n(q)$ и $U_n(q)$, во второй — $B_n(q)$ и $C_n(q)$ и в третьей — $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$.

Группы $L_n(q)$ и $U_n(q)$

Пусть $L \cong L_n(q)$ или $U_n(q)$.

В главе 1 был разобран случай, когда $n = 2$, поэтому будем считать, что $n \geqslant 3$.

За исключением $U_3(2)$ ($m_\chi(U_3(2)) = 7$) группы $L_n(q)$ и $U_n(q)$ неразрешимы, оценим значение $m(L)$, воспользовавшись леммой 1.5.5.

В качестве неприводимого характера χ выберем характер Стейнберга St_L степени $St_L(1) = q^{n(n-1)/2}$, а для числа классов сопряженных элементов воспользуемся оценкой из предложения 1.4.1: $k(L) \leqslant (6q)^{n-1}$.

Запишем полученное неравенство:

$$q^{n(n-1)/2} \leqslant m((6q)^{n-1} - 1) < m(6q)^{n-1}$$

или

$$q^{n/2-1} < 6 \sqrt[n-1]{m}.$$

Мы будем исключать группы, не являющиеся SM_2-группами, поэтому считаем, что $m = 2$. Тогда полученное неравенство можно записать так:

$$q^{n/2-1} < 6\sqrt[n-1]{2} < 9.$$

При $q \geqslant 3$ имеем $n/2 - 1 < \log_q 9 \leqslant 2$, откуда $n < 6$. То есть для $q \geqslant 3$ нам нужно рассмотреть случаи $n = 3, 4, 5$.

Если $n \leqslant 6$, то для групп $L_n(q)$ и $U_n(q)$, за исключением $U_4(2)$ и $U_5(2)$, существует оценка числа классов сопряженных элементов: $k(G) \leqslant 2q^{n-1}$ (см. предложение 1.4.2). Из этой оценки получается неравенство:

$$q^{n(n-1)/2} < m \cdot 2q^{n-1},$$

которое при $m = 2$ примет вид:

$$q^{(n-1)(n-2)/2} < 4.$$

Если $q = 3$, то из неравенства $3^{(n-1)(n-2)/2} < 4$ следует, что $n \leqslant 3$. При $q \geqslant 4$, $n \geqslant 3$ неравенство не выполняется. Таким образом, в случае $q \geqslant 3$ для дальнейшей проверки остаются группы $L_3(3)$, $U_3(3)$. Кроме того, остались группы $U_4(2)$ и $U_5(2)$. С помощью GAP убедимся, что эти группы не являются SM_2-группами.

Действительно, $m_\chi(L_3(3)) = 11$, $m_\chi(U_3(3)) = 5$, $m_\chi(U_4(2)) = 21$, а $m_\chi(U_5(2)) = 125$. (см. таблицу 13).

Пусть теперь $q = 2$. Если L — SM_2-группа, то в этом случае должно выполняться условие:

$$2^{n(n-1)/2} < 2(6 \cdot 2)^{n-1}$$

или

$$2^{n/2-1} < \sqrt[n-1]{2} \cdot 6.$$

Несложно убедиться, что это неравенство верно только при $n \leqslant 7$. У группы $L_7(2)$ классовое число равно $k(L_7(2)) = 117$, а для группы $U_7(2)$: $k(U_7(2)) = 239$. Степень характера Стейнберга у этих групп одинаковая и равна 2^{21}. Отсюда делаем вывод, что $m_\chi(L_7(2)) > 18078$, а $m_\chi(U_7(2)) > 8811$. Если $n \leqslant 6$, то, используя, как и выше, неравенство $2^{n(n-1)/2} < 2 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$, получаем, что $n(n-1)/2 < n+1$, откуда $n = 2$ или 3. Поскольку группы $L_2(2) \cong U_2(2)$ и $U_3(2)$ разрешимы, то они исключаются из списка рассматриваемых (обе они ASR-группы). Для оставшейся группы $L_3(2)$, в силу изоморфизма $L_3(2) \cong L_2(7)$, $m_\chi(L) = 3$.

Подведем итог:

Если $n = 2$, то в случае $q = 2^t \geqslant 4$, L — SM_2-группа. Если же $q > 5$ — нечетное, то L не является SM_2-группой.

Если $2 < n \leqslant 6$, то верна оценка:

$$m(L) = \frac{q^{n(n-1)/2}}{2q^{n-1} - 1} > \frac{q^{n(n-1)/2}}{2q^{n-1}} = \frac{q^{(n-1)(n-2)/2}}{2} > 2,$$

за исключением групп $L_3(3), U_3(3), U_4(2)$ и $U_5(2)$ (равенство достигается, когда $n = 3, q = 4$). С помощью GAP были вычислены занчения SM-характеристик:
$m_\chi(L_3(3)) = 11$, $m_\chi(U_3(3)) = 5$, $m_\chi(L_3(4)) = 13$, $m_\chi(U_3(4)) = 7$, $m_\chi(U_4(2)) = 21$, и $m_\chi(U_5(2)) = 125$. (см. таблицу 13).

Если $n > 6$, то $m(L)$ оценивается так:

$$m(L) = \frac{q^{n(n-1)/2}}{(6q)^{n-1} - 1} > \frac{q^{n(n-1)/2}}{(6q)^{n-1}} = \frac{q^{(n-2)(n-1)/2}}{6^{n-1}} > 307, \quad \text{при } q \geqslant 3,$$

Кроме того, $m(L_7(2)) > 18078$, $m(U_7(2)) > 8811$. Заметим, что с помощью GAP удалось вычислить $m_\chi(L_7(2)) = 124286$.

Группы $B_n(q)$ и $C_n(q)$

Пусть $L \cong B_n(q)$ или $C_n(q)$. За исключением $B_2(2)$, эти группы простые. Кроме того, $B_2(q) \cong C_2(q)$ и $B_n(2^m) \cong C_n(2^m)$. Ранг l группы L равен n, поэтому классовое число можно оценить как $k(L) \leqslant (6q)^n$. Степень характера Стейнберга $St_L(1) = q^{n^2}$.

Запишем неравенство $q^{n^2} < m(6q)^n$, откуда $q^{n^2-n} < m6^n$ или

$$q^{n-1} < 6\sqrt[n]{m} < 6\sqrt{m}.$$

Пусть $m = 2$. Для случая $q \geqslant 3$, из оценки $q^{n-1} < 6\sqrt{2} < 9$, получается условие $n < 3$. При $n = 2$ получается неравенство $q^{2-1} < 9$, то есть q может принимать значения 2, 3, 4, 5, 7, 8. Случай $q = 2$ рассматривать не будем, поскольку группа $B_2(2)$ изоморфна симметрической группе S_6, которая не является простой. Как будет показано далее, $m_\chi(S_6) = 5$, а для ее коммутанта A_6 значение $m_\chi(A_6) = 3$. Для $q = 3, 4, 5$ воспользуемся GAP: $m_\chi(B_2(3)) = 21$, $m_\chi(B_2(4)) = 41$, $m_\chi(B_2(5)) = 101$ (см. таблицу 13).

Для оставшихся $q \leqslant 8$, используя таблицу 11, оценим $m(L) = St_L(1)/(k(L) - 1)$:

Если $q = 7$, то $k(L) = 52$, $St_L(1) = 2401$, откуда: $m(L) = 2401/51 > 47$.

Если $q = 8$, то $k(L) = 83$, $St_L(1) = 4096$, значит: $m(L) = 4096/82 > 49$.

Если же $q = 2$, то из условия $2^{n-1} < 6\sqrt[n]{2}$, получаем, что n может принимать значения $2, 3$. Нам остается рассмотреть только группу $B_3(2) \cong C_3(2)$. Для этой группы, как было определено с помощью GAP, $m_\chi(B_3(2)) = 91$ (см. таблицу 13).

В общем случае, для числа $m(L)$ получается оценка: $m(L) = \dfrac{q^{n(n-1)}}{6^n - 1} > \left(\dfrac{q^{n-1}}{6}\right)^n$. Несложно увидеть, что $m(L) > 3$ при $q \geqslant 3$ и $n > 2$.

Группы $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$

Рассматривается случай $n \geqslant 4$. Для $L \cong D_n(q)$ или ${}^2D_n(q)$ степень характера Стейнберга $St_L(1)$ равна $q^{n(n-1)}$, а значит классовое число оценивается так: $k(L) \leqslant (6q)^{n-1}$. Из условия $q^{n(n-1)} < m(6q)^{n-1}$, при $m = 2$, получаем неравенство $q^{n-1} < 6\sqrt[3]{m} < 8$, которое для $q \geqslant 2$ верно только если $n < 4$. Мы получили противоречие, следовательно, группы $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$ не являются SM_2-группами.

В общем случае для $m(L)$ получается оценка: $m(L) = \dfrac{q^{(n-1)^2}}{6^{n-1}} = \left(\dfrac{q^{n-1}}{6}\right)^{n-1} > 2$.

Лемма доказана. □

3.2 Исключительные простые группы лиева типа

Лемма 3.2.1. *Среди исключительных простых групп лиева типа нет SM_2-групп.*

Доказательство. Для каждой из исключительных простых групп $E_n(q)$, ${}^2E_6(q)$, $G_2(q)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$, $F_4(q)$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, ${}^2F_4(2^{2n+1})$, оценим число $m = m(L)$, равное, как и раньше, отношению степени характера Стейнберга к числу $k(L) - 1$. Для этого воспользуемся значениями из таблицы 8.

Группы $E_n(q)$, $n = 6, 7, 8$ и ${}^2E_6(q)$

Пусть $L \cong E_6(q)$ или ${}^2E_6(q)$. Тогда $St_L(1) = q^{36}$, $k(L) \leqslant (6q)^6$, откуда получаем:

$$m(L) = \frac{q^{30}}{k(L) - 1} > \frac{q^{30}}{6^6} \geqslant \frac{2^{30}}{6^6} > 23014.$$

Для $L \cong E_7(q)$, используя значения $St_L(1) = q^{63}$ и оценку а $k(L) \leqslant (6q)^7$ получаем:

$$m(L) = \frac{q^{56}}{k(L) - 1} > \frac{q^{56}}{6^7} \geqslant \frac{2^{56}}{6^7} > 2,57 \cdot 10^{11}.$$

Если $L \cong E_8(q)$, имеем: $St_L(1) = q^{120}$, а $k(L) \leqslant (6q)^8$, откуда:

$$m(L) = \frac{q^{112}}{6^8 - 1} > \frac{q^{112}}{6^8} \geqslant \frac{2^{112}}{6^8} > 3,09 \cdot 10^{27}.$$

Группа $G_2(q)$

Пусть $L \cong G_2(q)$. Случай $q = 2$ не рассматриваем, поскольку $G_2(2)$ не является простой, а ее коммутант $G_2(2)' \cong U_3(3)$ — SM_5-группа.

Пусть $q = 3$. Тогда из таблицы 8: $St_{G_2(3)}(1) = 3^6$, $k(G_2(3)) = 23$, и $m(L) = \dfrac{3^6}{22} > 33$.

Пусть теперь $q > 3$. Для группы $L \cong G_2(q)$ имеем: $St_L(1) = q^6$, а $k(L) \leqslant (6q)^2$. Тогда $m(L) = \dfrac{q^6}{(6q)^2 - 1} > \dfrac{q^4}{36} > 7$.

Группа ${}^2B_2(2^{2n+1})$

Пусть $L \cong {}^2B_2(2^{2n+1})$. Группа L простая, если $n \geqslant 1$, поэтому будем считать, что $n \geqslant 1$. В этом случае $St_L(1) = (2^{2n+1})^2$, а $k(L) = 2^{2n+1}+3$. Используя GAP, вычислим $m_\chi({}^2B_2(8)) = 24$ (см. таблицу 13). Если $n = 2$, то $m({}^2B_2(2^5)) = \dfrac{2^{10}}{(2^5 + 3 - 1)} > 30$. При $n \geqslant 3$ нижняя граница для $m(L)$ получается такой:

$$m(L) = \frac{(2^{2n+1})^2}{2^{2n+1} + 2} = \frac{2^{4n+1}}{2^{2n} + 1} \geqslant \frac{2^{13}}{65} > 126.$$

Группа $F_4(q)$

Пусть $L \cong F_4(q)$. Для этой группы $St_L(1) = q^{24}$, $k(L) \leqslant (6q)^4$. Оценка для $m(L)$ получается такой: $m(L) = \dfrac{q^{24}}{(6q)^4 - 1} > \dfrac{q^{20}}{6^4} \geqslant \dfrac{2^{20}}{6^4} > 809$.

Группа ${}^3D_4(q)$

Пусть $L \cong {}^3D_4(q)$. Тогда $St_L(1) = q^{12}$, а $k(L) = q^4 + q^3 + q^2 + q + 6$, при $q > 2$. Оценим значение $k(L) - 1$ при $q > 2$:

$$k(L) - 1 = q^4 + q^3 + q^2 + q + 5 = q^2(q^2 + q + 1) + q + 5 < q^2(q^2 + 2q) + 3q =$$

$$= q^3(q + 2) + 3q < 2q^4 + 3q < q(2q^3 + 3) < q(3q^3) = 3q^4.$$

Тогда $m(L) > \dfrac{q^{12}}{3q^4} = \dfrac{q^8}{3} > 2187$.

Если $q = 2$, то $k(L) = 35$ и $m(L) = \dfrac{2^{12}}{35} > 117$.

Группа ${}^2G_2(3^{2n+1})$

Пусть $L \cong {}^2G_2(3^{2n+1})$, $n \geqslant 1$. Тогда $St_L(1) = (3^{2n+1})^3$, а $k(L) = 3^{2n+1} + 8$. Если $n \geqslant 1$, то $k(L) - 1 = 3^{2n+1} + 7 < 3^{2n+1} + 9 = 3(3^{2n} + 3) \leqslant 2 \cdot 3^{2n+1}$, поэтому для $m(L)$ мы получаем оценку: $m(L) > \dfrac{(3^{2n+1})^3}{2 \cdot 3^{2n+1}} = \dfrac{3^{4n+2}}{2} > 364$.

Группа ${}^2F_4(2^{2n+1})$

Пусть $L \cong {}^2F_4(2^{2n+1})$. Если $n \geqslant 1$, то L простая группа. Если же $n = 0$, то простой группой будет коммутант ${}^2F_4(2)'$ — группа Титса. Если $L \cong {}^2F_4(2)'$, то $St_G(1) = 2^{11}$, а $k(G) = 22$, откуда $m(L) = \dfrac{2^{11}}{21} > 97$.

Пусть теперь $n \geqslant 1$. Тогда $St_L(1) = (2^{2n+1})^{12}$, а $k(L) = (2^{2n+1})^2 + 4 \cdot 2^{2n+1} + 17$.

Как и раньше, оценим $k(L) - 1$:

$$k(L) - 1 = (2^{2n+1})^2 + 4 \cdot 2^{2n+1} + 16 \leqslant (2^{2n+1})^2 + 4 \cdot 2^{2n+1} + 2 \cdot 2^{2n+1} =$$

$$= (2^{2n+1}) \cdot (2^{2n+1} + 6) < 2^{2n+1} \cdot (2^{2n+1} + 2^{2n+1}) = 2^{2n+1} \cdot 2^{2n+2} = 2^{4n+3}.$$

Используя последнее неравенство, запишем оценку:

$$m(L) = \frac{St_L(1)}{k(G) - 1} > \frac{(2^{2n+1})^{12}}{2^{4n+3}} = 2^{20n+9} > 5 \cdot 10^8.$$

Лемма доказана. □

3.3 Спорадические группы

Лемма 3.3.1. *Спорадические группы не являются SM_{20}-группами*

Доказательство. В том, что ни одна из спорадических групп не является SM_2-группой легко убедиться, используя лемму 1.5.5 и значения из таблицы 12. Для более точных результатов мы вновь прибегнем к системе компьютерной алгебры GAP. С помощью GAP (см. приложение, стр. 101) были получены точные значения SM-характеристики. Результаты приведены в таблице 15. Видно, что наименьшее из значений SM-характеристик спорадических групп будет у группы Матье M_{11}: $m_\chi(M_{11}) = 21$. Лемма доказана. □

3.4 Знакопеременные группы

Лемма 3.4.1. *Среди простых знакопеременных групп SM_2-группой является только группа A_5.*

Доказательство. Пусть L — знакопеременная SM_2-группа и $n \geqslant 5$. Тогда, по лемме 1.5.5, для неприводимого характера χ_0 группы L наибольшей степени выполняется:

$$\chi_0(1) < 2k(L) \leqslant 2 \cdot 2k(S_n) = 4p(n), \tag{5}$$

где $p(n)$ — число разбиений n.

Если $n > 12$, то, по предложению 1.4.3, число $p(n)$ можно оценить так:

$$p(n) < (3/2)^n \cdot (2 \cdot \sqrt{3})^{-1/2}.$$

Тогда неравенство (5) примет вид:

$$\chi_0(1) < 4 \cdot (3/2)^n \cdot (2 \cdot \sqrt{3})^{-1/2}.$$

Далее, для каждой простой группы L, согласно предложению 1.2.7, выполняется условие: $\chi_0(1) > |L|^{1/3}$. Отсюда мы получаем неравенство:

$$\left(\frac{n!}{2}\right)^{1/3} < 4 \cdot (3/2)^n \cdot (2 \cdot \sqrt{3})^{-1/2},$$

или

$$n! < 19,9 \cdot (3/2)^{3n} < 19,9 \cdot 2^{2n} < 2^{2n+5},$$

поскольку $3^3 < 2^5$

Пусть $n = 13$. Тогда $n! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 > 2^{19} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 > 2^{25} \cdot 11 \cdot 13 > 2^{32}$. Подставим полученные значения в неравенство $n! < 2^{2n+5}$:

$$2^{32} < 13! < 2^{2 \cdot 13+5} = 2^{31},$$

противоречие, следовательно, случай $n = 13$ не подходит. Несложно увидеть, что при $n > 13$ условие $n! < 2^{2n+5}$ также не будет выполняться.

Нам осталось проверить неравенство $\chi_0(1) < 2k(A_n)$ при $5 \leqslant n \leqslant 12$. Воспользовавшись информацией из таблицы 1, убеждаемся, что ни одна из групп A_n, при $8 < n < 12$ не является SM_2-группой.

Из оставшихся групп, только группа A_5 является SM_2-группой. Действительно, группа $A_5 \cong L_2(4)$ уже рассматривалась, — это SM_2-группа. Далее, $A_6 \cong L_2(9)$ — SM_3-группа. Для оставшихся двух групп используем GAP: $m_\chi(A_8 \cong L_4(2)) = 16$, $m_\chi(A_7) = 17$ (см. таблицу 13). Лемма доказана. $\square$

Из лемм 3.1.1–3.4.1 следует доказательство теоремы:

Теорема 3.4.2. *Пусть L — конечная простая набелева SM_2-группа. Тогда L изоморфна группе $L_2(q)$, где $q = 2^t, t \geqslant 2$.*

4 Почти простые SM_2-группы

В рамках этой главы мы будем считать группу G почти простой. По определению 1.1.6, $L \leqslant G \leqslant \mathrm{Aut}(L)$, где L — простая неабелева группа. Из определения сразу следует, что L — цоколь группы G.

Исследование почти простых групп мы начнем со случая, когда L — простая группа лиева типа.

В главе 3 были получены оценки числа $m(L) = \dfrac{\chi(1)}{k(L)-1}$ для всех простых групп L. При этом условие $m(L) > r$ означало, в силу леммы 1.5.5, что L — не SM_r-группа. В качестве характера χ выбирался, как правило, характер Стейнберга St_L. Значение степени этого характера хорошо известно, и, кроме того, в указанных группах L не существует другого неприводимого характера такой же степени. Это означает, что в почти простой группе G с цоколем L найдется неприводимый характер ψ_G, такой, что $\psi_G(1) \geqslant St_L(1)$.

Далее, по предложению 1.4.5, $k(G) \leqslant k(L)|G : L|$, и, в частности, $k(\mathrm{Aut}(L)) \leqslant$ $\leqslant k(L)|\mathrm{Out}(L)|$.

Полученные сравнения позволят перенести рассуждения относительно простых групп на почти простые. Обозначим характер наибольшей степени группы G как ψ_0. Тогда число $m(G)$ можно оценить снизу:

$$m(G) = \frac{\psi_0(1)}{k(G)-1} \geqslant \frac{St_L(1)}{k(G)-1} \geqslant \frac{St_L(1)}{(k(L)-1)|G:L|} \geqslant \frac{m(L)}{|\mathrm{Out}(L)|}.$$

Условие $m(G) > r$ будет означать, что G не является SM_r-группой. Также заметим, что выполняется неравенство: $m(L) \geqslant m(G) \geqslant m(\mathrm{Aut}(L))$.

В работе с отдельными группами нам придется использовать неприводимые характеры, у которых степень больше, чем $St_L(1)$. Покажем, что если χ_0 — неприводимый характер группы L, имеющий наибольшую степень, то в группе G найдется неприводимый характер ψ, такой, что $\psi(1) \geqslant \chi_0(1)$.

Согласно теории Клиффорда индуцированный характер χ_0^G раскладывается в сумму $\chi_0^G = \sum_{i=1}^k e_i\psi_i$, где ψ_i — неприводимые характеры группы G и $e_i \geqslant 0$. Тогда, по закону взаимности Фробениуса, скалярное произведение равно:

$$[\psi_i|_L, \chi_0]_L = [\psi_i, \chi_0^G]_G = e_i.$$

В силу вышесказанного, найдется такой номер i, что $e_i \neq 0$. Это означает, что характер $\psi_i|_L$ можно представить в виде суммы : $\psi_i|_L = e\chi_0 + \theta$, где $e = e_i \geqslant 1$, а θ — сумма остальных характеров в этом разложении. Теперь, обозначив $\psi = \psi_i$, мы получаем

$$\psi(1) = \psi_i|_L(1) = e\chi_0(1) + \theta(1) \geqslant \chi_0(1).$$

4.1 Почти простые группы с цоколем, изоморфным классической простой группе лиева типа

Лемма 4.1.1. *Пусть G — конечная почти простая SM_2-группа с цоколем L, изоморфным классической простой группе лиева типа. Тогда $G \cong PGL_2(q)$.*

Доказательство. Разобъем доказательство на отдельные случаи.

Группы $L_2(q)$

Ранее нами было доказано (см. главу 2), что если G — почти простая SM_2-группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, то $G \cong PGL_2(q)$.

Кроме того, в силу изоморфизма $L_2(q) \cong U_2(q)$, эти выводы касаются и групп $U_2(q)$.

Группы $L_n(p^t), 3 \leqslant n \leqslant 6$

Пусть $L \cong L_n(p^t), n \geqslant 3$. Для $2 < n \leqslant 6$ получена оценка $m(L) > \dfrac{p^{t(n-1)(n-2)/2}}{2}$ (см. главу 3), поэтому:

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{|\mathrm{Out}(L)|} > \frac{p^{t(n-1)(n-2)/2}}{2|\mathrm{Out}(L)|}.$$

Пусть $n = 3$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| \leqslant 6t$, и поэтому $m(G) > \dfrac{p^t}{12t}$. Условие $m(G) \leqslant 2$ запишется в виде: $p^t < 24t$.

При $t = 1$ это неравенство выполняется для $p < 24$. Для дополнительной проверки понадобится рассмотреть случаи $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$.

При $t = 2$ получаем $p^2 < 48$, что верно для $p = 2, 3, 5$.

При $t = 3, 4$ из неравенства $p^t < 24t$ следует, что требуется проверка для $p = 2, 3$.

Если $t = 5, 6, 7$ то неравенство $p^t < 24t$ верно для $p \leqslant 2$. Поэтому требуется проверка для $p = 2$.

При $t > 7$ неравенство $p^t < 24t$ выполняется только для $p \leqslant 1$.

Пусть $n = 4$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| \leqslant 8t$. Условие $m(G) \leqslant 2$ запишется как $p^{3t} < 32t$.

При $t = 1$ из неравенства $p^3 < 32$ заключаем, что требуется проверка для $p = 2, 3$.

Если $t = 2$, то из неравенства $p^6 < 64$, следует, что требуется проверка для $p = 2$.

При $t > 2$ неравенство $p^{3t} < 32t$ не выполняется, если $p > 1$.

Если $n = 5$, то $|\mathrm{Out}(L)| \leqslant 10t$, и условие $m(G) \leqslant 2$ записывается как $p^{6t} < 40t$. Это неравенство не выполняется ни для каких $p \leqslant 1$.

Если $n = 6$, то $|\mathrm{Out}(L)| \leqslant 12t$, и условие $m(G) \leqslant 2$ записывается как $p^{10t} < 48t$. Это неравенство также неверно, если $p > 1$.

Таким образом, для последующей проверки остаются случаи, когда L — одна из 21 групп:

для $t = 1$: $L_3(3)$, $L_3(5)$, $L_3(7)$, $L_3(11)$, $L_3(13)$, $L_3(17)$, $L_3(19)$, $L_3(23)$, $L_4(2)$, $L_4(3)$,

для $t = 2$: $L_3(4)$, $L_3(9)$, $L_3(25)$, $L_4(4)$, для $t = 3$: $L_3(8)$, $L_3(27)$,

для $t = 4$: $L_3(16)$, $L_3(81)$, для $t = 5$: $L_3(32)$,

для $t = 6$: $L_3(64)$, для $t = 7$: $L_3(128)$.

Вычислим для этих групп точное значение порядка $|\mathrm{Out}(L)| = 2(p^t - 1, n)t$ и проверим выполнение условия $m(G) \leqslant 2$:

$$p^{t(n-1)(n-2)/2} < 4|\mathrm{Out}(L)| = 8(p^t - 1, n)t.$$

Несложно увидеть, что в результате этой проверки из списка исключатся 6 групп: $L_3(11)$, $L_3(17)$, $L_3(23)$, $L_3(27)$, $L_3(81)$, $L_3(128)$.

Для оставшихся 15 групп, используя таблицу 9, оценим число

$$m(G) > \frac{St_L(1)}{k(L)|\mathrm{Out}(L)|}.$$

Проверив с помощью этого неравенства условие $m(G) \leqslant 2$, мы приходим к выводу, что цоколем $L \cong L_n(q)$ почти простой SM_2-группы G могут быть только группы: $L_3(2)$, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $L_3(16)$. Рассмотрим каждую из этих групп отдельно.

Пусть $L \cong L_3(2)$. Порядок группы внешних автоморфизмов $|\mathrm{Out}(L)|$ равен 2, поэтому группа G изоморфна L или ее группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(L) \cong PGL_2(7)$. Как уже было доказано в главе 2, $L_3(2) \cong L_2(7)$ — SM_3-группа, а $PGL_2(7)$ — SM_2-группа.

Если $L \cong L_3(3)$, то порядок $|\mathrm{Out}(L)|$ также равен 2. Следовательно, группа G изоморфна либо L, либо $\mathrm{Aut}(L)$. С помощью GAP было вычислено, что $m_\chi(L_3(3)) = 11$, а $m_\chi(\mathrm{Aut}(L_3(3))) = 12$.

Пусть $L \cong L_3(4)$. Группа внешних автоморфизмов $\mathrm{Out}(L)$ устроена несколько сложнее. Согласно [23], $\mathrm{Out}(L)$ изоморфна диэдральной группе D_{12}, а группа автоморфизмов

$\mathrm{Aut}(L)$ представляет собой полупрямое произведение $L_3(4) \rtimes D_{12}$. Таким образом, почти простой будет группа G со строением $L \rtimes H$, где $H \leqslant D_{12}$. Перечислим такие группы:

Во-первых, это сама группа L, затем 3 группы $L \rtimes C_2$ (одна из них $P\Sigma L_3(4)$), две группы $L \rtimes C_3$ (одна из них $PGL_3(4)$), две группы $L \rtimes C_3 \rtimes C_2$ (одна из которых $P\Gamma L_3(4)$), группа $L \rtimes C_6$ и, наконец, $\mathrm{Aut}(L) \cong L \rtimes D_{12}$.

Для групп $L_3(4)$, $PGL_3(4)$ и $\mathrm{Aut}(L_3(4))$ в GAP было получены следующие результаты: $m_\chi(L_3(4)) = 13$, $m_\chi(PGL_3(4)) = 22$ и $m_\chi(\mathrm{Aut}(L_3(4))) = 65$. Для оставшихся почти простых групп можно использовать оценку $m(G) \geqslant \dfrac{m(L)}{c}$, где $c = |G : L|$ — индекс L в G. Несложно увидеть, что для этих групп число $m(G)$ всегда больше двух.

Пусть $L \cong L_3(8)$. Группа $\mathrm{Out}(L)$ — циклическая группа порядка 6, а $\mathrm{Aut}(L)$ является расширением $L.C_6$. Почти простыми группами здесь будут: L, $L.C_2$, $L.C_3$ и $\mathrm{Aut}(L)$. Так как $m(L) > 7$, то $m(L.C_2) > 3$, а $m(L.C_3) > 2$.

Осталось рассмотреть случай, когда $G \cong \mathrm{Aut}(L_3(8))$. Вычислим в GAP классовое число: $k(G) = 41$. Тогда, воспользовавшись информацией из таблицы 9, получаем:

$$m(G) = \frac{\psi(1)}{k(G)-1} \geqslant \frac{St_L(1)}{k(G)-1} \geqslant \frac{8^3}{40} > 12.$$

Пусть $L \cong L_3(16)$. Тогда $k(L) = 93$, а $|\mathrm{Out}(L)| = 24$. В группе L есть неприводимый характер χ_{st} наибольшей степени $st = (q+1)(q^2+q+1) = 4641$ (см. таблицу 6). Тогда для любой почти простой группы G мы получаем:

$$m(G) = \frac{\chi_{st}(1)}{k(G)-1} \geqslant \frac{\chi_{st}(1)}{k(L)|\mathrm{Out}(L)|-1} = \frac{4641}{93 \cdot 24 - 1} > 2,08.$$

Группы $L_n(p^t), n > 6$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $n > 6$. Воспользовавшись полученной в лемме 3.1.1 оценкой, запишем $m(L) > \dfrac{q^{(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1}}$, где $q = p^t$. Поэтому оценка снизу для $m(G)$ запишется так:

$$m(G) > \frac{p^{t(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1}|\mathrm{Out}(L)|} = \frac{p^{t(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1} \cdot 2(p^t-1,n)t}.$$

Легко проверить, что уже при $n > 3$, и тем более при $n > 6$, $m(G)$ принимает наименьшее значение, если $t = 1$. Поэтому мы можем переписать последнее неравенство так:

$$m(G) > \frac{p^{(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1} \cdot 2(p-1,n)}.$$

Если $p > 2$, то:

$$m(G) > \frac{3^{(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1}\cdot 2n} \geqslant \frac{3^{(n-1)(n/2-2)}}{2^{n-1}\cdot 2n} = \left(\frac{\sqrt{3^n}}{18}\right)^{n-1}\frac{1}{2n}.$$

Поскольку $n > 6$, полученное выражение будет принимать свое наименьшее значение при $n = 7$:

$$\left(\frac{\sqrt{3^7}}{18}\right)^{6}\frac{1}{14} > 21.$$

Пусть теперь $p = 2$. В этом случае:

$$m(G) > \frac{2^{(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1}\cdot 2n} = \frac{2^{(n-1)(n/2-2)}}{3^{n-1}\cdot 2n} = \left(\frac{\sqrt{2^n}}{12}\right)^{n-1}\frac{1}{2n}.$$

Последнее значение больше 8, если $n \geqslant 9$, поэтому необходимо проверить случаи $n = 7, 8$. Кроме того, необходимо оценить $m(G)$, в случае $t > 1$:

$$m(G) > \frac{2^{(n-1)(tn/2-t-1)}}{3^{n-1}\cdot 2nt} = \left(\frac{\sqrt{2^{t(n-2)}}}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{2tn}.$$

Непосредственная проверка показывает, что если $t > 1$ и $n \geqslant 7$, то $m(G) > 821$.

Проверим теперь группы $L_7(2)$ и $L_8(2)$.

Если $L \cong L_7(2)$ или $L_8(2)$, то $|\mathrm{Out}(L)| = 2(2-1, n) = 2$. Оценим $m(G)$:

$$m(G) > \frac{m(L)}{2} = \frac{St_L(1)}{2k(L)}.$$

Если $L \cong L_7(2)$, то $k(L) = 117$, а степень характера Стейнберга $St_L(1) = 2^{21}$, поэтому $m(G) \geqslant \dfrac{2^{21}}{117\cdot 2 - 1} > 9000$.

Если же $L \cong L_8(2)$, то $k(L) = 246$, а $St_L(1) = 2^{28}$, поэтому $m(G) > 546711$.

Добавим, что с помощью GAP удалось вычислить значения: $m_\chi(L_7(2).C_2) = 372312$, и $m_\chi(L_8(2)) = 8826587$.

Группы $U_n(p^t)$

Порядок $|\mathrm{Out}(U_n(p^t))|$ равен $2(p^t+1, n)t$.

Пусть $L \cong U_n(p^t)$. При $2 < n \leqslant 6$, за исключением групп $U_4(2)$ и $U_5(2)$, верна оценка:

$$m(L) > \frac{p^{t(n-1)(n-2)/2}}{2}.$$

Действуя таким же образом, как и для групп $L_n(p^t)$, запишем нижнюю границу для $m(G)$:

$$m(G) > \frac{p^{t(n-1)(n-2)/2}}{2|\mathrm{Out}(L)|} = \frac{p^{t(n-1)(n-2)/2}}{4(p^t+1,n)t}$$

Выполним проверку условия $m(G) \leqslant 2$. В результате проверки мы получили, что L может быть одной из групп: $U_3(2)$, $U_3(3)$, $U_3(5)$, $U_3(7)$, $U_3(8)$, $U_3(9)$, $U_3(11)$, $U_3(13)$, $U_3(16)$, $U_3(17)$, $U_3(19)$, $U_3(23)$, $U_3(25)$, $U_3(27)$, $U_3(32)$, $U_3(64)$, $U_3(81)$, $U_3(128)$, $U_4(2)$, $U_4(3)$, $U_4(4)$. Кроме того, остается группа $U_5(2)$.

Вычислим $|\mathrm{Out}(L)|$ для каждой из этих групп и проверим, при каких n и p выполняется неравенство $m(G) \leqslant 2:$

$$p^{t(n-1)(n-2)/2} < 4|\mathrm{Out}(L)| = 8(p^t+1,n)t.$$

После проверки из списка исключаются группы: $U_3(13)$, $U_3(19)$, $U_3(25)$, $U_3(27)$, $U_3(81)$, $U_3(64)$, $U_4(4)$.

Для того, чтобы сократить список оставшихся групп, воспользуемся информацией о классовом числе оставшихся групп из таблицы 10, и подставим их в неравенство:

$$m(G) \geqslant \frac{St(1)}{|\mathrm{Out}(L)|(k(L)-1)}.$$

После проверки условия $m(G) \leqslant 2$, список групп сократится до: $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$, $U_3(16)$, $U_4(2)$, $U_5(2)$. Рассмотрим каждую из этих групп отдельно.

Пусть $L \cong U_3(3) \cong PGU_3(3)$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2$, а значит, почти простыми в этом случае будут только группы $U_3(3)$ и $\mathrm{Aut}(U_3(3))$. С помощью GAP получаем, что $m_\chi(U_3(3)) = 5$, $m_\chi(\mathrm{Aut}(U_3(3))) = 20$.

Пусть $L \cong U_3(4)$. Тогда G будет одной из групп: L, $L \rtimes C_2$, $\mathrm{Aut}(L) \cong P\Gamma U_3(4)$. В GAP получаем, что: $m_\chi(U_3(4)) = 7$, $m_\chi((U_3(4) \rtimes C_2) = 26$, $m_\chi(\mathrm{Aut}(U_3(4))) = 101$.

Пусть $L \cong U_3(5)$. Тогда G будет одной из групп: L, $PGU_3(5)$, $P\Sigma U_3(5)$, $\mathrm{Aut}(U_3(3)) \cong$ $\cong P\Gamma U_3(5)$. Для этих групп, используя GAP, вычислим: $m_\chi(U_3(5)) = 23$, $m_\chi(PGU_3(5)) = 8$, $m_\chi(P\Gamma U_3(5)) = 32$. Для группы $G \cong P\Sigma U_3(5)$ подойдет оценка: $m(G) \geqslant \dfrac{m(L)}{2} = \dfrac{125}{13 \cdot 2} > 4$.

Пусть $L \cong U_3(8)$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 18$. Используем значение $m(L) = \dfrac{512}{27} > 18$. Для любой почти простой группы G, строго содержащейся в $\mathrm{Aut}(U_3(8))$ получается оценка $m(G) \geqslant m/9 > 2$. В GAP вычислим $k(\mathrm{Aut}(L)) = 47$. Тогда $m(G) \geqslant \dfrac{St(1)}{k(\mathrm{Aut}(L))} = \dfrac{512}{47} > 10$.

Пусть $L \cong U_3(16)$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 8$ и в группе L существует (см. таблицу 7) характер χ_{r^2s} степени $r^2s = 17^2 15 = 4335$. Если G — SM_2-группа, то для любого ее неприводимого характера χ выполняется $\chi^2(1) = \sum_{i=1}^{k(G)} c_i\chi_i(1)$, где $c_i \in 0,1,2$. Тогда по предложению 1.5.3: $\chi^2_{r^2s}(1) \leqslant 2\sqrt{|G|k(G)}$. Вычислим: $\chi^2_{r^2s}(1) = = 4335^2 > 18,7 \cdot 10^6$ и $2\sqrt{k(G)|G|} \leqslant 2\sqrt{k(L)|L|}|\mathrm{Out}(L)| < 8,7 \cdot 10^6$. Отсюда видно, что $m(G) > 2$.

Пусть $L \cong U_4(2)$. Поскольку $|\mathrm{Out}(L)| = 2$, то единственная почти простая группа, кроме L, здесь будет $\mathrm{Aut}(L)$. Для этих групп мы получаем в GAP следующий результат: $m_\chi(U_4(2)) = 21$, $m_\chi(\mathrm{Aut}(U_4(2))) = 14$.

Пусть $L \cong U_5(2)$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2$, и значит почти простыми группами также будут группы L и $\mathrm{Aut}(L)$. Применяя GAP, мы получаем, что $m_\chi(U_5(2)) = 125$ а $m_\chi(\mathrm{Aut}(U_5(2))) = 497$.

Осталось рассмотреть случай, когда $n > 6$. Действуя таким же образом, как и для групп $L_n(p^t)$ мы получаем, при $p > 2$: $m(G) > 21$, а при $p = 2$:

$$m(G) > \frac{2^{t(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1} \cdot 2(2^t+1,n)t} \geqslant \frac{2^{t(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1} \cdot 2nt}$$

Далее, если $t > 1$, то $m(G) > 821$. Для $t = 1$, $m(G) > 8$ при $n > 9$. Таким образом, нам осталось рассмотреть случаи, когда группа $L \cong U_7(2)$ или $U_8(2)$.

Вычислим порядок $|\mathrm{Out}(L)|$ для каждой из этих групп и подставим в неравенство

$$m(G) > \frac{St(1)}{k(L)|\mathrm{Out}(L)|}.$$

Если $L \cong U_7(2)$ или $U_8(2)$, то $|\mathrm{Out}(L)| = 2$. Тогда, если $L \cong U_7(2)$, то $k(L) = 239$, а $St(1) = 2^{21}$, поэтому $m(G) > \dfrac{2^{20}}{239} > 548$, а если $L \cong U_8(2)$, то $k(L) = 520$, а $St(1) = 2^{28}$, поэтому $m(G) > 258111$.

Группы $B_n(p^t)$

Для группы $L \cong B_n(p^t)$ порядок $|\mathrm{Out}(L)| = (2, p^t - 1)t$, для $n > 2$. Если $L \cong B_2(2^t)$, то $|\mathrm{Out}(L)| = 2t$. В первом случае, если p — нечетное, то $|\mathrm{Out}(L)| = 2t$, если же p — четное, то $|\mathrm{Out}(L)| = t$.

Тогда:

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{2t} = \frac{1}{2t}\left(\frac{p^{t(n-1)}}{6}\right)^n.$$

Пусть $t = 1$. Если $n = 2$, то условие $m(G) \leqslant 2$ выполняется при $p \leqslant 12$. Оценим число $m(G)$ для $p = 2$, 3, 5, 7, 11, используя формулу $m(G) \geqslant \dfrac{St(1)}{k(L) \cdot |\mathrm{Out}(L)|}$. Обратимся к таблице 11: если $p = 3$, то $m(G) \geqslant \dfrac{81}{20 \cdot 2} > 2$, если $p = 5$, то $m(G) \geqslant \dfrac{625}{34 \cdot 2} > 9$. Действуя таким же образом, получаем, что если $L \cong B_2(7)$, то $m(G) > 23$, а если $L \cong B_2(11)$, то $m(G) > 73$.

Если $t = 1$, а $n = 3$, то из условия $m(G) \leqslant 2$ следует, что $p \leqslant 3$, следовательно, требуется проверка для $q = 2$ и 3. В силу того, что $|\mathrm{Out}(B_3(2))| = 1$, $\mathrm{Aut}(B_3(2)) \cong B_3(2)$. Мы получили в GAP, что $m_\chi(B_3(2)) = 91$.

Поскольку $m(B_3(3)) > 202$, а $|\mathrm{Out}(B_3(3))| = 2$, то $m(\mathrm{Aut}(B_3(3))) > 100$.

Если же $t = 1$, а $n \geqslant 4$, то неравенство $\frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{6}\right)^4 \leqslant 2$ выполняется для $p \leqslant 2$, поэтому необходимо проверить только группу $\mathrm{Aut}(B_4(2))$. Поскольку $|\mathrm{Out}(L)| = 1$, то $\mathrm{Aut}(B_4(2)) \cong B_4(2)$, а группа $B_4(2)$, как было установлено в главе 3, не SM_{809}-группа.

Пусть $t = 2$. Из неравенства $m(G) = \frac{1}{4}\left(\frac{p^{2n-2}}{6}\right)^n \leqslant 2$ при $n = 2$ следует, что $p \leqslant 4$. При $n > 3$, неравенство не выполняется для простых $p > 1$.

Пусть $t = 3$. В этом случае получаем неравенство $m(G) = \frac{1}{6}\left(\frac{p^{3n-3}}{6}\right)^n \leqslant 2$, из которого, при $n = 2$ следует, что $p \leqslant 2$. Для $n > 3$ следует, что $p \leqslant 1$.

Пусть $t = 4$. Тогда значение $m(G) = \frac{1}{8}\left(\frac{p^{4n-4}}{6}\right)^n$ будет не больше 2, если $n \leqslant 2$ или $p \leqslant 2$.

Наконец, при $t \geqslant 5$ неравенство $m(G) \leqslant 2$ выполняется при $n \geqslant 2$, $p \leqslant 1$.

Таким образом, для дополнительной проверки остаются группы автоморфизмов групп: $B_2(4)$, $B_2(8)$, $B_2(9)$ и $B_2(16)$. Оценим значение $m(G)$, если L — одна из этих групп. Для $B_2(4)$, $m(G) \geqslant \frac{256}{27 \cdot 4} > 2$. Для $B_2(8)$, $m(G) \geqslant \frac{4096}{83 \cdot 6} > 8$. Для $B_2(9)$, $m(G) \geqslant \frac{6561}{74 \cdot 4} > 22$. Для $B_2(16)$, $m(G) \geqslant \frac{65536}{291 \cdot 8} > 28$.

Группы $C_n(p^t)$.

Пусть $L \cong C_n(p^t), n > 2$. Так как $|\mathrm{Out}(L)| = (2, p^t - 1)t \leqslant 2t$, то

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{2t} = \frac{1}{2t}\left(\frac{p^{t(n-1)}}{6}\right)^n.$$

Проверим, при каких t, p и n значение $m(G)$ не больше 2. Пусть $t = 1$. Тогда при $n = 3, 4$, требуется, чтобы p было не больше 3, а для $n \geqslant 5$ неравенство $m(G) > 2$ выполняется для любых $p > 1$. Таким образом, остались случаи, когда L изоморфна $C_3(2)$, $C_3(3)$ или $C_4(2)$.

Так как $C_3(2) \cong B_3(2)$, $C_4(2) \cong B_4(2)$ то $m_\chi(\mathrm{Aut}(C_3(2))) = 91$, $m_\chi(\mathrm{Aut}(C_4(2))) > 809$. В свою очередь, $m_\chi(C_3(3)) > 265$, следовательно, $m_\chi(\mathrm{Aut}(C_3(3))) > 132$.

Если $t > 1$, то наименьшее значение $m(G) = 4$ будет при $p = 2$, $n = 3$.

Группы $D_n(p^t)$.

Пусть $L \cong D_n(p^t)$. Известно, что при $n = 4$, $|\mathrm{Out}(L)| = 6(4, p^{4t} - 1)t$. Если $p > 2$, то $|\mathrm{Out}(L)| \leqslant 24t$, и для $m(G)$ получается следующая оценка:

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{24t} = \frac{p^{9t}}{24t \cdot 6^3} \geqslant \frac{3^9}{24 \cdot 6^3} > 3.$$

Если $p = 2$, то $|\mathrm{Out}(L)| = 6t$, и тогда

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{6t} = \frac{2^{9t}}{6t \cdot 6^3}.$$

При $t > 1$ выполняется $m(G) > 101$. Если же $t = 1$, то, воспользовавшись данными таблицы 8, получаем оценку: $m(G) \geqslant \dfrac{2^{12}}{53 \cdot 6} > 12$.

Если $n > 4$, то $\mathrm{Out}(L) = 2(4, p^{tn} - 1)t$. При $p > 2$, $|\mathrm{Out}(L)| \leqslant 8t$. В этом случае

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{8t} = \frac{p^{t(n-1)^2}}{8t \cdot 6^{n-1}} = \frac{1}{8t}\left(\frac{p^{t(n-1)}}{6}\right)^{n-1}.$$

Наименьшее значение этого выражения будет при $t = 1$, $p = 3$ и $n = 5$. Таким образом, $m(G) \geqslant \dfrac{19683}{664} > 307$

Пусть $p = 2$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2t$, что позволяет оценить $m(G)$ как:

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{2t} = \frac{2^{t(n-1)^2}}{2t \cdot 6^{n-1}} = \frac{1}{2t}\left(\frac{2^{t(n-1)}}{6}\right)^{n-1}.$$

Понятно, что наименьшее значение этого выражения будет при $t = 1$ и $n = 5$. Таким образом, $m(G) \geqslant \dfrac{2048}{81} > 25$.

Для группы $L \cong {}^2D_n(p^t)$ используем равенство $|\mathrm{Out}(L)| = 2(4, p^{tn} + 1)t$. При $p = 2$ получаем $|\mathrm{Out}(L)| = 2t$, и, следовательно, оценка для $m(G)$ такая же, как и в случае $L \cong D_n(2)$, при $n > 4$: $m(G) > 25$. Если же $p > 2$, то $|\mathrm{Out}(L)| \leqslant 8t$, и тогда $m(G) > 307$ (как и в случае $L \cong D_n(p^t)$, при $n > 4$). Лемма доказана. □

4.2 Почти простые группы с цоколем, изоморфным исключительной простой группе лиева типа

Лемма 4.2.1. *Среди почти простых групп с цоколем, изоморфным исключительной простой группе лиева типа, не существует SM_2-групп.*

Доказательство. Группы $E_6(p^t)$, $^2E_6(p^t)$, $E_7(p^t)$, $E_8(p^t)$

Пусть $L \cong E_6(p^t)$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2(3, p^t-1)t \leqslant 6t$, и $m(G)$ можно оценить так:

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{6t} = \frac{p^{30t}}{6^6 \cdot 6t} = \frac{p^{30t}}{6^7 \cdot t}.$$

Наименьшее значение $m(G)$ будет при $t=1$, что в 6 раз меньше $m(L)$. То есть $m(G) > 3835$.

Если $L \cong {}^2E_6(p^t)$, то $|\mathrm{Out}(L)| = 2(3, p^t+1)t \leqslant 6t$. Этот случай аналогичен предыдущему, $m(G) > 3835$.

Если $L \cong E_7(p^t)$, то $|\mathrm{Out}(L)| = (2, p^t-1)t$.

Если $p=2$, то $|\mathrm{Out}(L)| = t$, и тогда:

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{t} = \frac{2^{56t}}{6^7 \cdot t} = \frac{2^{56t-7}}{3^7 \cdot t} > 2,57 \cdot 10^{11}.$$

Если же $p>2$, то $|\mathrm{Out}(L)| = 2t$, и

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{2t} = \frac{2^{56t}}{6^7 \cdot 2t} = \frac{2^{56t-8}}{3^7 \cdot t} > 1,28 \cdot 10^{11}.$$

Пусть $L \cong E_8(p^t)$. Поскольку $|\mathrm{Out}(L)| = t$, то $m(G) \geqslant \dfrac{p^{112t}}{6^8 \cdot t} > 3,09 \cdot 10^{27}$.

Группа $G_2(q)$

Пусть $L \cong G_2(p^t)$. Если $p=3$, то $|\mathrm{Out}(L)| = 2t$. В этом случае, при $t>1$

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{2t} = \frac{3^{4t}}{36 \cdot 2t} = \frac{3^{4t-2}}{8t} > 45.$$

Если же $t=1$, то, поскольку $m(G_2(3)) > 33$, то $m(G) > 33/2 > 16$.

Пусть $p \neq 3$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = t$, и для $m(G)$ получается такая оценка:

$$m(G) \geqslant \frac{m(L)}{3t} = \frac{p^{4t}}{36t}.$$

При $p \geqslant 5$ число $m(G)$ будет больше 17. Если $p=2$, то для $t>1$ выполняется $m(G) > 3$. Остается последний случай — группа $\mathrm{Aut}(G_2(2)) \cong \mathrm{Aut}(U_3(3)) \cong \cong P\Gamma U_3(3)$. Для нее $m_\chi(\mathrm{Aut}(G_2(2))) = 20$.

Группа $^2B_2(2^{2n+1})$

Пусть $L \cong {}^2B_2(2^{2n+1})$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2n+1$ и число $m(G)$ можно оценить так:
$m(G) \geqslant \dfrac{2^{2n+4}}{9(2n+1)} > 5$, при $n \geqslant 2$.

Группа $F_4(q)$

Пусть $L \cong F_4(p^t)$. Для нее $|\mathrm{Out}(L)| = (2,p)t$, что при $p \neq 2$ дает оценку для $m(G)$: $m(G) \geqslant \frac{p^{20t}}{6^4 \cdot t} > 2690420$. Если же $p = 2$, то $m(G) \geqslant \frac{2^{20t}}{6^4 \cdot t} > 809$.

Группа ${}^3D_4(q)$

Пусть $L \cong {}^3D_4(p^t)$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 3t$, откуда $m(G) \geqslant \frac{p^{8t}}{9t} > 28$.

Группа ${}^2G_2(3^{2n+1})$

Пусть $L \cong {}^2G_2(3^{2n+1})$. Так как $|\mathrm{Out}(L)| = 2n+1$, то $m(G) \geqslant \frac{3^{4n+3}}{4(2n+1)} > 20$.

Группа ${}^2F_4(2^{2n+1})$

Пусть $L \cong {}^2F_4(2^{2n+1})$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2n+1$, и $m(G) \geqslant \frac{2^{20n+12}}{7(2n+1)} > 2 \cdot 10^8$.

Известно, что $|\mathrm{Out}({}^2F_4(2)')| = 2$, поэтому для нее $m(G) \geqslant 93/2 > 46$.

Лемма доказана. $\square$

4.3 Почти простые группы с цоколем, изоморфным знакопеременной группе

Лемма 4.3.1. *Среди почти простых групп с цоколем $A_n, n \geqslant 5$, SM_2-группами являются только группы A_5, S_5 и $PGL_2(9)$.*

Доказательство. В случае $n \geqslant 5, n \neq 6$, $\mathrm{Aut}(A_n) \cong S_n$. Пусть $n \geqslant 5$ и $n \neq 6$. Поскольку у группы S_n кроме ее самой нет подгрупп, строго содержащих A_n, то среди почти простых групп нужно проверить только S_n. Пусть χ_0 и ψ_0 — характеры максимальной степени у групп A_n и S_n. Их степени $\chi_0(1)$ и $\psi_0(1)$ будут равны, если они соответствуют одной и той же несимметричной диаграмме Юнга. В противном случае $\chi_0(1) < \psi_0(1)$. Тогда, если S_n — SM$_2$-группа, то $\psi_0(1) \leqslant 2(k(S_n) - 1)$, откуда учитывая, что $k(S_n) = p(n)$, мы получаем неравенство:

$$\chi_0(1) < 2p(n). \qquad (6)$$

Если $n > 12$, то, С учетом предложений 2 и 3, это неравенство можно записать так:

$$n! < 16p(n)^3 < 16 \cdot (3/2)^{3n} \cdot (2 \cdot \sqrt{3})^{-3/2} < 2,49 \cdot (3/2)^{3n} < 2,49 \cdot 2^{2n}$$

Пусть $n = 13$. Так как $13! > 2^{32}$, то мы получаем: $2^{32} < 2,49 \cdot 2^{26}$, противоречие. Несложно увидеть, что при $n > 13$ это неравенство также неверно.

Для $n = 7, .., 12$ обратимся к таблице 1. Используя значения $p(n)$ и информацию о степени характера $\chi_0(1)$, убеждаемся, что при $n > 6$ неравенство (6) не будет верным. Следовательно, и эти случаи отпадают.

Пусть $n = 5$. Группа $S_5 \cong PGL_2(5)$ и, тогда $m_\chi(S_5) = 2$. Случай $n = 6$ был рассмотрен в главе 3. Лемма доказана. □

4.4 Почти простые группы с цоколем, изоморфным спорадической группе

Лемма 4.4.1. *Ни одна из почти простых групп с цоколем, изоморфным спорадической группе, не является SM_{20}-группой.*

Доказательство. По имеющейся информации в таблице 12, для группы L, изоморфной одной из групп: M_{12}, M_{22}, J_2, J_3, Fi_{22}, Fi'_{24}, Suz, He, HS, McL, HN, $O'N$, порядок $|\mathrm{Out}(L)|$ равен 2. Отсюда можно сделать вывод о том, что если G — почти простая группа с цоколем L, то $G \cong L$ или $G \cong \mathrm{Aut}(L)$. С помощью GAP были вычислены SM-характеристики рассматриваемых групп автоморфизмов (см. таблицу 15). Как оказалось, для каждой из перечисленных групп $m_\chi(G) \geqslant 28$.

Для остальных спорадических групп $|\mathrm{Out}(L)| = 1$, поэтому почти простой группой с цоколем L будет только сама группа L. Лемма доказана. □

Рассмотрев все конечные почти простые группы, приходим к выводу, что верна:

Теорема 4.4.2. *Пусть G — конечная почти простая SM_2-группа. Тогда она изоморфна группе $PGL_2(q)$ или A_5.*

5 Неразрешимые SM_2-группы

Наша задача — выяснить, каким будет строение неразрешимой SM_2-группы G.

Рассматривая группы небольшого порядка, удалось установить, что неабелевыми композиционными факторами такой группы G будут только группы, изоморфные $L_2(q)$.

Как уже было доказано в главе 4 (теорема 4.4.2), почти простыми SM_2-группами являются только группы $PGL_2(q)$ или $A_5 \cong L_2(4) \cong L_2(5)$, поэтому логично предположить, что похожим строением обладают неразрешимые группы и в общем случае.

В дальнейшем мы будем действовать от противного. Предположим, что существуют конечные неразрешимые SM_2-группы, композиционные факторы у которых отличны от абелевых групп и $L_2(q)$. Выберем среди них группу G наименьшего порядка. Далее в этой главе будем считать, что неразрешимая группа G — именно этот контрпример.

Докажем следующее утверждение:

Лемма 5.0.3. *Пусть G — неразрешимая SM_2-группа наименьшего порядка и N — ее минимальная нормальная подгруппа. Тогда:*

1. *N — единственная минимальная нормальная подгруппа G, то есть N — цоколь группы G.*
2. *$N \cong L_1 \times \dots \times L_m$, где L_i изоморфны простой неабелевой группе L.*
3. *G изоморфна подгруппе сплетения $\mathrm{Aut}(L) \wr S$, где S — подгруппа симметрической группы S_m, действующая транзитивно на множестве минимальных нормальных подгрупп группы N.*

Доказательство. Любое представление факторгруппы, в силу предложения 1.2.1 является представлением группы. Поэтому, если G — контрпример наименьшего порядка, то факторгруппа G/N будет SM_2-группой (см. лемму 1.5.7), у которой неабелевы факторы изоморфны $L_2(q)$. Если G имеет пару различных минимальных нормальных подгрупп M и N, то, поскольку

$$G \cong G/(M \cap N) \leqslant G/M \times G/N,$$

то и сама группа G не содержит неабелевых композиционных факторов отличных от $L_2(q)$. Таким образом, группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, т.е. N — цоколь G.

Так как $C_G(N)$ нормальна в G, а $C_G(N) \cap N = Z(G)$ — разрешимая нормальная подгруппа группы G, то $C_G(N) \cap N = 1$. Следовательно, $C_G(N) = 1$, и значит, $G \subseteq \mathrm{Aut}(N)$.

Очевидно, что N — характеристически простая группа:

$$N = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_m,$$

где L_i — изоморфные простые неабелевы группы.

Известно, что группа автоморфизмов характеристически простой неабелевой группы является подгруппой сплетения $\mathrm{Aut}(L) \wr S$, где $L \cong L_1$ — простая неабелева группа, а S — подгруппа симметрической группы S_n, действующая транзитивно на множестве минимальных нормальных подгрупп группы N. Лемма доказана. □

Замечание 2. *Подобное доказательство приводится в работах [6], [5].*

Таким образом, рассматриваемый контрпример имеет вполне определенное строение. В следующих утверждениях будет рассмотрена SM_2-группа $G \leqslant \mathrm{Aut}(N)$, где $N \cong \cong L_1 \times \cdots \times L_m$, а $L \cong L_i$ — простая неабелева группа. При этом, $\mathrm{Aut}(N) \cong A \wr S$, где $A = \mathrm{Aut}(L)$, а S — подгруппа симметрической группы S_m. Через χ_0 будем обозначать неприводимый характер группы L, имеющий наибольшую степень.

Лемма 5.0.4. *Пусть G — SM_2-группа. Тогда*

$$\chi_0(1) < c \cdot |\mathrm{Out}(L)| \cdot k(L), \tag{7}$$

где $c = (2 \cdot k(S))^{1/m}$, а $k(S)$ — классовое число группы S.

Если $m > 2$, то $c \leqslant \sqrt[3]{6} < 1,82$ и $c = 2$, если $m = 2$.

Доказательство. Рассматривается ситуция, когда $m \geqslant 2$. Тогда

$$k(G) \leqslant k(S)(|\mathrm{Out}(L)| k(L))^m.$$

Так как χ_0 — неприводимый характер группы L, то $\Theta_0 = \chi_0^m$ является неприводимым характером группы N. При этом, по теореме взаимности Фробениуса:

$$\left[\Theta_0^G|_N, \Theta_0\right]_N = \left[\Theta_0^G, \Theta_0^G\right]_G > 0.$$

Поэтому существует такой неприводимый характер Φ_0 группы G, что ограничение $\Phi_0|_N$ содержит Θ_0. В частности, $\Phi_0(1) \geqslant \chi_0(1)^m$. Используя оценку, полученную в лемме 1.5.2, получаем

$$\chi_0(1)^m \leqslant \Phi_0(1) \leqslant 2 \cdot k(G) \leqslant 2 \cdot k(S)(|\mathrm{Out}(L)| k(L))^m.$$

Извлекая корень степени m из обеих частей неравенства, находим, что

$$\chi_0(1) \leqslant (2 \cdot k(S))^{1/m} |\mathrm{Out}(L)| \cdot k(L). \tag{8}$$

Если $m = 2$, то $k(S) \leqslant k(S_m) = 2$ и неравенство запишется как

$$\chi_0(1) \leqslant 2 \cdot |\mathrm{Out}(L)| \cdot k(L).$$

Пусть $m > 2$. Тогда, по предложению 1.4.4,

$$c = (2 \cdot k(S))^{1/m} \leqslant (2 \cdot 3^{(m-1)/2})^{1/m}$$

Вынесем $\sqrt{3}$ из корня степени m:

$$c \leqslant \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3^m}}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant \sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6} < 1,82.$$

Лемма доказана. □

Замечание 3. *Проведенные рассуждения подходят, если G — SM_r-группа. В этом случае: $\chi_0(1) < c \cdot |\mathrm{Out}(L)| \cdot k(L)$, где $c = (r \cdot k(S))^{1/m}$.*

Теперь воспользуемся неравенством (8), чтобы определить, каких простые группы L могут входить в цоколь группы G.

Теорема 5.0.5. *Пусть G — SM_2-группа, $m \leqslant 2$. Тогда L изоморфна одной из следующих групп: $L_2(q)$, A_7, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$, $U_3(16)$.*

Доказательство. Если $m = 1$, то G — почти простая группа с цоколем L. Как было доказано в главе 4, G — почти простая SM_2-группа, если $G \leqslant \mathrm{Aut}(L_2(q))$. Отсюда следует, что $L \cong L_2(q)$.

Пусть теперь $m = 2$. Неравенство (8) примет вид:

$$\chi_0(1) \leqslant 2 \cdot |\mathrm{Out}(L)| \cdot k(L). \tag{9}$$

Если L — простая неабелева группа, то L — это простая группа лиева типа, знакопеременная группа A_n, $n \geqslant 5$, или одна из 26 спорадических простых групп. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

Знакопеременные группы

Если $n > 6$, то $|\mathrm{Out}(L)| = 2$, поэтому неравенство (9) можно записать так:

$$\chi_0(1) \leqslant 4 \cdot k(L). \tag{10}$$

Пусть $n > 12$. Тогда, по предложению 1.4.3, $k(L) \leqslant k(S_n) < (3/2)^n \cdot (2\cdot\sqrt{3})^{-1/2}$ и неравенство (10) примет вид $\chi_0(1) < 4 \cdot (3/2)^n \cdot (2 \cdot \sqrt{3})^{-1/2}$.

Согласно предложению 1.2.7, $\chi_0(1) > |L|^{1/3} = (n!/2)^{1/3}$, поэтому мы получаем следующее неравенство:

$$\left(\frac{n!}{2}\right)^{1/3} < 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot (2 \cdot \sqrt{3})^{-1/2}$$

или $n! < 19,9 \cdot (3/2)^{3n}$, а поскольку $3^3 < 2^5$, то

$$n! < 19,9 \cdot (3/2)^{3n} < 19,9 \cdot 2^{2n} < 2^{2n+5}.$$

Пусть $n = 13$. Тогда $13! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 > 2^{19} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 > 2^{25} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 > 2^{32}$, откуда получаем, что $2^{32} < 13! < 2^{2\cdot 13+5} = 2^{31}$, противоречие, следовательно, случай $n = 13$ не подходит. Несложно увидеть, что при $n > 13$ неравенство $n! < 2^{2n+5}$ также неверно.

Пусть $7 \leqslant n \leqslant 12$. Выполним проверку неравенства

$$\chi_0(1) < 4,365 \cdot k(L).$$

С помощью функции `NrConjugacyClasses` в GAP вычислим классовое число группы A_n при $7 \leqslant n \leqslant 12$. В результате получаем список значений [9, 14, 18, 24, 31, 43] (см. таблицу 1). Функция `CharacterDegrees` возвращает список степеней неприводимых характеров группы. Для групп A_n, при $7 \leqslant n \leqslant 12$, получаем список: [35, 70, 216, 567, 2310, 5775]. Непосредственная проверка показывает, что неравенство (10) не выполняется при $n \geqslant 8$. Для дальнейшей проверки остаются группы: A_5, A_6, A_7.

Спорадические простые группы

Запишем неравенство (9) в виде $\chi_0(1)^2 < 4 \cdot |\mathrm{Out}(L)|^2 \cdot k(L)^2$, а поскольку

$$|L| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(L)} \chi(1)^2 \leqslant k(L)\chi_0(1)^2,$$

то окончательно получаем условие:

$$|L| < 4 \cdot |\mathrm{Out}(L)|^2 k(L)^3. \tag{11}$$

По имеющейся информации о значениях $|L|$, $|\mathrm{Out}(L)|$ и $k(L)$ для спорадических групп (см. таблицу 12) можно сделать вывод, что ни одна из них не удовлетворяет неравенству (11). Таким образом, спорадические группы исключаются.

В дальнейшем в качестве характера χ_0 мы будем рассматривать характер Стейнберга. Значения $\mathrm{St}(1)$, $|\mathrm{Out}(L)|$ и оценки $k(L)$ взяты из таблиц 8–11.

Исключительные простые группы лиева типа

Пусть $L \cong E_6(p^t)$, тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2(3, p^t - 1)t \leqslant 6t$, $k(L) \leqslant 6^6 \cdot p^{6t}$ а $\mathrm{St}_L(1) = p^{36t}$. Неравенство (9) примет вид: $p^{36t} \leqslant 2 \cdot 6t \cdot 6^6 \cdot p^{6t}$ или $p^{30t} \leqslant 559872 \cdot t$. Ясно, что неравенство не справедливо ни при каких p и t.

Если $L \cong {}^2E_6(p^t)$, то $|\mathrm{Out}(L)| = 2(3, p^t + 1)t \leqslant 6t$, $k(L) \leqslant 6^6 \cdot p^{6t}$ а $\mathrm{St}_L(1) = p^{36t}$. Этот случай аналогичен предыдущему.

Если $L \cong E_7(p^t)$, то $|\mathrm{Out}(L)| = (2, p^t - 1)t \leqslant 2t$, $\mathrm{St}_L(1) = p^{63t}$, $k(L) \leqslant 6^7 \cdot p^{7t}$. Тогда $p^{63t} \leqslant 2 \cdot 2t \cdot 6^7 \cdot p^{7t}$ или $p^{56t} \leqslant 1119744 \cdot t$, что неверно.

Пусть $L \cong E_8(p^t)$. Поскольку $|\mathrm{Out}(L)| = t$, $\mathrm{St}_L(1) = p^{120t}$, а $k(L) \leqslant 6^8 \cdot p^{8t}$, то неравенство (9) примет вид: $p^{120t} \leqslant 2 \cdot t \cdot 6^8 \cdot p^{8t}$ или $p^{112t} \leqslant 3359232 \cdot t$. Это неравенство также не выполняется ни для каких p и t.

Пусть $L \cong G_2(p^t)$. Тогда $\mathrm{St}_L(1) = p^{6t}$, $|\mathrm{Out}(L)| = (3, p) \cdot t \leqslant 3t$, $k(L) \leqslant 36p^{2t}$. Неравенство примет вид: $p^{6t} \leqslant 2 \cdot 3t \cdot 36p^{2t}$ или $p^{4t} \leqslant 216 \cdot t$. Несложно убедиться, что неравенство справедливо при $p = 2$, если $t = 1$ или 2, и при $p = 3$, если $t = 1$. Таким образом, для дальнейшего изучения остаются группы $G_2(2)$, $G_2(3)$, $G_2(4)$. Группа $G_2(2)$ не является простой. Ее коммутант $G_2(2)' \cong U_3(3)$ рассмотрим позднее. Если $L \cong G_2(3)$, то $k(L) = 23$, и, в этом случае, получаем $3^6 \leqslant 2 \cdot 3 \cdot 23 = 138$, что, очевидно, неверно. Если $L \cong G_2(4)$, то $k(L) = 32$, и наше неравенство будет записываться так: $2^{12} \leqslant 2 \cdot 2 \cdot 32 = 128$, что тоже неверно. То есть группы $G_2(3)$ и $G_2(4)$ исключаются.

Пусть $L \cong {}^2B_2(2^{2n+1})$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2n + 1$, $\mathrm{St}_L(1) = 2^{4n+2}$, и $k(L)= 2^{2n+1} + 3$. Неравенство (9) можно записать как:

$$2^{4n+2} \leqslant 2 \cdot (2n + 1) \cdot (2^{2n+1} + 3)$$

или

$$2^{2n+1} \leqslant 2 \cdot (2n + 1) \cdot (1 + 3/2^{2n+1}).$$

Последнее верно только при $n = 0$ и 1. Группа ${}^2B_2(2)$ разрешима, поэтому она исключается. Остается группа ${}^2B_2(8)$. Еще раз используем неравенство (9), учитывая, что у группы ${}^2B_2(8)$ имеется характер степени 91: $91 \leqslant 2 \cdot 3 \cdot 11$. Видно, что и этот случай исключается.

Пусть $L \cong F_4(p^t)$. Для нее $|\mathrm{Out}(L)| = (2,p)t \leqslant 2t$, $\mathrm{St}_L(1) = p^{24t}$, $k(L) \leqslant 6^4 \cdot p^{4t}$. Мы получаем неравенство $p^{24t} \leqslant 2 \cdot 2t \cdot 6^4 \cdot p^{4t}$ или $p^{20t} \leqslant 5184t$, которое неверно ни при каких p и t. Таким образом, группы $F_4(p^t)$ исключаются.

Пусть $L \cong {}^3D_4(p^t)$. Тогда $|\mathrm{Out}(G)| = 3t$, $\mathrm{St}_L(1) = p^{12t}$. Если $p^t = 2$, то $k(L) = 35$, а если $q = p^t > 2$, то

$$k(L) = q^4 + q^3 + q^2 + q + 6 = q^2(q^2 + q + 1) + q + 6 \leqslant q^2(q^2 + 2q) + 4q = 2q^4 + 4q < 3q^4.$$

Пусть $p^t = 2$. Тогда $2^{12} \leqslant 2 \cdot 3 \cdot 35$ или $2^{12} \leqslant 210$, что неверно. Если $p^t > 2$, то $p^{12t} \leqslant 2 \cdot 3t \cdot 3 \cdot p^{4t}$ или $p^{8t} \leqslant 18t$, что также неверно. Следовательно, и группы ${}^3D_4(p^t)$ исключаются.

Пусть $L \cong {}^2G_2(3^{2n+1})$, $n \geqslant 1$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2n + 1$, $\mathrm{St}_L(1) = 3^{3(2n+1)}$, а $k(L) = 3^{2n+1} + 8 < 3^{2n+1} + 9 \leqslant 4 \cdot 3^{2n}$. Неравенство (9) примет вид: $3^{6n+3} < 2 \cdot (2n+1) \cdot 4 \cdot 3^{2n}$ или $3^{4n+3} < 8 \cdot (2n+1)$, что не выполняется ни при каких $n > 0$. Группы ${}^2G_2(3^{2n+1})$ также исключаются.

Пусть $L \cong {}^2F_4(2^{2n+1})$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2n + 1$, $\mathrm{St}_L(1) = 2^{12(2n+1)}$, а классовое число $k(L) = 2^{2(2n+1)} + 4 \cdot 2^{2n+1} + 17$. Если $n = 0$, то $\mathrm{St}_L(1) = 2^{12}$, $k(L) = 22$, а $|\mathrm{Out}(L)| = 2$. Если $n \geqslant 1$, то $k(L) = 2^{4n+2} + 2^{2n+3} + 17 < 2^{4n} \cdot 5 + 2^{2n} \cdot 9 < 2^{4n+3}$. Несложно убедиться, что неравенство (9) не выполняется ни при каких n.

Классические простые группы лиева типа

Пусть $L \cong L_n(p^t)$, $n \geqslant 3$, тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2(p^t - 1, n)t$, $k(L) \leqslant (6p^t)^{n-1}$, а $\mathrm{St}_L(1) = p^{tn(n-1)/2}$.

Также существует другая оценка для числа классов группы $L_n(q)$: если $3 \leqslant n \leqslant 6$, то $k(L) \leqslant 2p^{t(n-1)}$.

Если $n = 3$ то неравенство (9) примет вид: $p^{3t} \leqslant 2 \cdot 6t \cdot 2 \cdot p^{2t}$. После преобразования получим $p^t \leqslant 24t$. Подходящие значения p и t для этого неравенства будут такими:

при $t = 1$, $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$,

при $t = 2$, $p = 2, 3, 5$,

при $t = 3, 4$, $p = 2, 3$, и

при $t = 5, 6, 7$, $p = 2$.

Если $n = 4$ то неравенство (9) примет вид: $p^{6t} \leqslant 2 \cdot 8t \cdot 2 \cdot p^{3t}$. После преобразования получим $p^{3t} \leqslant 32t$. Подходящие значения p и t для этого неравенства будут такими: при $t = 1$, $p = 2, 3$, а при $t = 2$, $p = 2$.

Если $n = 5, 6$, то, как несложно убедиться, подходящих p и t нет.

Пусть $n \geqslant 7$. Выпишем неравенство в этом случае:
$p^{tn(n-1)/2} \leqslant 2 \cdot 2(p^t - 1, n)t \cdot (6p^t)^{n-1}$ или $p^{t(n-1)(n-2)/2} \leqslant 2 \cdot 2(p^t - 1, n)t \cdot 6^{n-1}$.

Если $n = 7$, то получаем $p^{21t} \leqslant 2 \cdot 2 \cdot 7t \cdot 6^6 = 1306368t$. Это неравенство не выполняется ни при каких p и t, то же верно и для $n \geqslant 7$.

Чтобы отсеять лишние группы из полученного списка, вычислим значения $|\mathrm{Out}(L)|$ для каждого из n, p, t и подставим в неравенство (9).

В результате получается, что для последующей проверки останутся группы $L_3(q)$, для $q =$ 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 16, 19, 25, 32, 64 и группа $L_4(2)$. Далее, используя функцию GAP `NrConjugacyClassesPSL`, вычислим классовое число для каждой из представленных групп

Проверим выполнение неравенства $St_L(1) \leqslant 2 \cdot |\mathrm{Out(L)}| \cdot k(L)$.

Очевидно, неравенство будет верным если L — одна из групп: $L_3(2)$, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $L_3(16)$.

Для оставшихся групп будем использовать дополнительную информацию о степени характера $\chi_0(1)$: для $L_3(3)$ $\chi_0(1) = 39$, для $L_3(4)$ $\chi_0(1) = 64$, для $L_3(8)$ $\chi_0(1) = 657$, для $L_3(16)$ $\chi_0(1) = 4641$. Подставив эти значения в неравенство (9), окончательно получаем такой список групп: $L_3(2) \cong L_2(7)$, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$.

Пусть $L \cong U_n(p^t)$, $n \geqslant 3$, тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2(p^t + 1, n)t$, $k(L) \leqslant (6p^t)^{n-1}$, а $\mathrm{St}_L(1) = p^{tn(n-1)/2}$.

Если $3 \leqslant n \leqslant 6$, то, за исключением $U_4(2)$ и $U_5(2)$ классовое число можно оценить так: $k(G) \leqslant 2q^{n-1}$.

При $n = 3$ неравенство (9) примет вид: $p^{3t} \leqslant 2 \cdot 6t \cdot 2 \cdot p^{2t}$ или $p^t \leqslant 24t$. Также, как и для групп $L_n(q)$, мы получаем следующие значения p и t:
при $t = 1$, $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$,
при $t = 2$, $p = 2, 3, 5$,
при $t = 3, 4$, $p = 2, 3$, и
при $t = 5, 6, 7$, $p = 2$.

Если $n = 4$ то неравенство (9) примет вид: $p^{6t} \leqslant 2 \cdot 8t \cdot 2 \cdot p^{3t}$. После преобразования получим $p^{3t} \leqslant 32t$. Подходящие значения p и t для этого неравенства будут такими: при $t = 1$, $p = 2, 3$, а при $t = 2$, $p = 2$.

По аналогии с группами $L_n(q)$ мы получаем, что при $n \geqslant 5, 6$ подходящих p и t не существует. Нам остается рассмотреть только группу $U_5(2)$.

Вычислим значения $|\mathrm{Out}(L)|$ для каждого из полученных чисел n, p, t и подставим в неравенство (9). В результате получается, что для последующей проверки останутся группы $U_3(q)$, для $q = 3$, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 16, 17, 23, 32, 128, и группы $L_4(2)$ и $L_5(2)$. Группа $U_3(2)$ разрешимая, поэтому она исключается.

Далее, используя функцию GAP `NrConjugacyClassesPSU`, вычислим классовое число для каждой из этих групп

Проверим выполнения неравенства $St_L(1) \leqslant 2 \cdot |\mathrm{Out(L)}| \cdot k(L)$.

Нетрудно показать, что неравенство будет верным, если L — одна из групп: $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$, $U_3(9)$, $U_3(16)$, $U_4(2)$.

Воспользуемся информацией о степени характера χ_0 для полученных групп: для $U_3(3)$ $\chi_0(1) = 32$, для $U_3(4)$ $\chi_0(1) = 75$, для $U_3(5)$ $\chi_0(1) = 144$, для $U_3(8)$ $\chi_0(1) = 576$, для $U_3(9)$ $\chi_0(1) = 800$, для $U_3(16)$ $\chi_0(1) = 4335$, и для $U_4(2)$ $\chi_0(1) = 81$. Подставив эти значения в неравенство (9), убедимся, что список сократился до групп: $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$, $U_3(16)$.

Пусть $L \cong B_n(q)$ или $C_n(q)$, $q = p^t$. За исключением $B_2(2)$, эти группы простые. Кроме того, $B_2(q) \cong C_2(q)$ и $B_n(2^m) \cong C_n(2^m)$. Степень характера Стейнберга $St(1) = q^{n^2}$, классовое число можно оценить как $k(L) \leqslant (6q)^n$, а $|\mathrm{Out}(L)| = 2t$, если $q = 2^t$ и $|\mathrm{Out}(L)| = (2, q-1)t \leqslant 2t$ в противном случае.

Неравенство (9) будет иметь вид: $q^{n^2} \leqslant 2 \cdot 2t \cdot (6q)^n$ или $q^{n(n-1)} \leqslant 4t \cdot 6^n$.

Пусть $n \geqslant 4$. Запишем неравенство как: $q^{(n-1)} = p^{t(n-1)} \leqslant \sqrt[n]{4t} \cdot 6 < 8,49t$. Видно, что при $n = 4$ это неравенство выполняется только если $p = 2, t = 1$, а при бóльших значениях n, подходящих $p > 1$ и $t > 0$ не существует. Далее, $k(B_4(2)) = 81$, поэтому, подставив это значение в неравенство (9), убеждаемся, что и эта группа исключается.

Пусть $n = 3$. Тогда $q^9 \leqslant 2 \cdot 2t \cdot 6^3 \cdot q^3$, т.е. $q^6 \leqslant 864 \cdot t$, откуда $q \leqslant 3$.

Для группы $L \cong B_3(2)$, классовое число $k(L) = 30$, а $|\mathrm{Out}(L)| = 1$. Из противоречия $2^9 \leqslant 2 \cdot 1 \cdot 30 = 60$ делаем вывод, что группа $B_3(2)$ исключается.

Если $L \cong B_3(3)$ или $C_3(3)$, то $k(L) = 98$. В этом случае неравенство (9) примет вид: $3^9 < 2 \cdot 2 \cdot 98 = 392$, что, очевидно, неверно, поэтому и указанные группы исключаются.

Пусть $n = 2$. Тогда неравенство запишется так: $q^4 \leqslant 2 \cdot 2t \cdot (6q)^2$ или $p^{2t} \leqslant 144 \cdot t$. Если $t = 1$, то $p^2 \leqslant 144$, то есть p может принимать значения 3, 5, 7, 11. Таким же образом получаем, что если $t = 2$, то $p = 2$, 3, а при $t \geqslant 3$, единственное подходящее значение $p = 2$ будет при $t = 3, 4$. Нам остается проверить группы $B_2(3)$, $B_2(4)$, $B_2(5)$, $B_2(7)$, $B_2(8)$, $B_2(9)$, $B_2(11)$, $B_2(16)$. Вычислим в GAP классовое число для этих групп и значение $|\mathrm{Out}(L)|$.

Затем проверим выполнение неравенства $q^4 \leqslant 2 \cdot \mathrm{Out(L)} \cdot k(L)$ для этих групп. Как несложно убедиться, неравенство не выполняется ни ни в одном из случаев, поэтому и эти группы исключаются.

Пусть $L \cong D_n(q)$ или ${}^2D_n(q)$, $q = p^t$. Тогда $St(1) = q^{n(n-1)}$, $k(L) \leqslant (6q)^{n-1}$. В обоих случаях $n \geqslant 4$ ввиду изоморфизмов групп меньшего лиева ранга уже рассмотренным выше группам.

Пусть $n \geqslant 5$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| \leqslant 2 \cdot 4t$. Выпишем неравенство:
$q^{n(n-1)} \leqslant 2 \cdot 4 \cdot 2t \cdot (6q)^{n-1} = 16t \cdot (6q)^{n-1} < 16t \cdot (8q)^{n-1} \leqslant 16t \cdot q^{4(n-1)}$, откуда $q^{(n-1)(n-4)} < 16t$, что неверно при $n \geqslant 6$.

Пусть $n = 5$. Тогда $q^{20} \leqslant 16t(6q)^5 < 16t \cdot q^{18}$, так как $6 < 2^{13/5}$. Отсюда $q^2 \leqslant 16t$. Возможные значения q следующие: $2, 3, 4$. Вычислив $|\mathrm{Out}(L)|$ для этих случаев, убеждаемся, что при $q = 2, 3, 4$ неравенство (9) не выполняется.

Осталось рассмотреть случай $n = 4$. Проверим выполнение неравенства 9 отдельно для каждой из групп $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$.

Пусть $L \cong D_4(q)$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 6(q^4 - 1, 4)t$, и неравенство $q^{12} \leqslant 2 \cdot 6 \cdot 4t \cdot (6q)^3$ можно записать так: $q^9 \leqslant 10368 \cdot t$. Это неравенство не имеет решений для $q \geqslant 3$. Поэтому $q = 2$. Известно, что $k(D_4(2)) = 53$ а $|\mathrm{Out}(D_4(2))| = 6$. Тогда получаем $2^{12} \leqslant 2 \cdot 6 \cdot 53 = 636$, что неверно.

Если $L \cong {}^2D_4(q)$, то $|\mathrm{Out}(L)| = 2(q^4 + 1, 4)t$. Поэтому имеем следующее неравенство $q^{12} \leqslant 2 \cdot 2 \cdot 4t \cdot (6q)^3$, откуда $q^9 \leqslant 3456t$. Единственным решением этого неравенства будет $q = 2$. Поскольку $k({}^2D_4(2)) = 39$, а $|\mathrm{Out}({}^2D_4(2))| = 2$ то получаем $2^{12} \leqslant 2 \cdot 2 \cdot 39 = 156$, что, очевидно, неверно.

Мы получили, что если $m = 2$, то группой L могут быть: A_7, $L_2(q)$, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$, $U_3(16)$. Теорема доказана. □

Следствие 5.0.6. *Пусть G — SM_2-группа, $m \geqslant 3$. Тогда L — одна из следующих групп: $L_2(q)$, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$.*

Доказательство. Нам требуется выяснить, для каких из простых неабелевых групп L будет выполняться неравенство (8) при $m \geqslant 3$:

$$\chi_0(1) < \sqrt[3]{6} \cdot |\mathrm{Out}(L)| \cdot k(L) < 1,82 \cdot |\mathrm{Out}(L)| k(L).$$

Согласно теореме 5.0.5, группами, удовлетворяющими менее строгому неравенству $\chi_0(1) \leqslant 2 \cdot |\mathrm{Out}(L)| \cdot k(L)$ будут: $L_2(q)$, A_7, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$, $U_3(16)$. Поэтому нам остается рассмотреть только их.

Воспользуемся информацией об этих группах, полученной в доказательстве теоремы 5.0.5 и проверим для каких из этих групп выполнено условие

$$\chi_0(1) < 1,82 \cdot |\mathrm{Out}(L)| k(L).$$

Несложно увидеть, что список групп сократится до $L_2(q)$, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$. Следствие доказано. □

Для уточнения полученных результатов о строении простой группы L, мы построим неприводимый характер специального вида в группе G.

Пусть η — неприводимый характер наибольшей степени в группе L. В каждой из групп L_i выберем характер η_i, соответствующий характеру η группы L.

Сконструируем теперь характер Θ группы N в виде $\Theta = \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_m$.

Пусть $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_l$ — различные сопряженные характеры к характеру $\Theta = \Theta_1$ под действием подгруппы G. Согласно предложению 1.2.16, число характеров, сопряженных характеру $\Theta = \Theta_1$ в группе G, равно $|G : I_G(\Theta)|$.

Отметим, что для любых $i \leqslant m$ и $a \in A_i$ характер η_i^a будет неприводимым характером подгруппы L_i и $(\eta_i^a)^2 = d\eta_i^a + \varpi^a$, т.е. кратность характера η_i^a в $(\eta_i^a)^2$ та же, что и кратность η_i в η_i^2. Поэтому для любого $b \in A$ верно равенство $(\Theta^b)^2 = d^m \Theta^b + \Gamma$, где Γ — сумма остальных неприводимых характеров, входящих в разложение $(\Theta^b)^2$. В силу предложения 1.2.16 имеем $\Theta^G = \sum_{i=1}^r e_i \chi_i$.

Найдем кратность характера $\chi = \chi_{i_0}$ для индекса i_0, такого, что $e = e_{i_0} = \max_{i=1}^r e_i$. В силу того, что G — SM$_2$-группа, $\chi^2 = \sum_k c_k \psi_k$ — сумма различных неприводимых характеров группы G, а $c_j \in \{0, 1, 2\}$

Поэтому

$$[\chi^2, \Theta^G]_G = \left[\sum_k c_k\psi_k, \sum_{i=1}^r e_i\chi_i\right] = \sum_{j=1}^r c_je_j.$$

Воспользовавшись законом взаимности Фробениуса, получаем

$$[\chi^2, \Theta^G]_G = [\chi^2|_N, \Theta]_N = e^2\left[\left(\sum_{j=1}^l \Theta_j\right)^2, \Theta\right] \geqslant e^2\left[\sum_{j=1}^l \Theta_j^2, \Theta\right] \geqslant e^2d^m.$$

Таким образом,

$$e^2d^m \leqslant \sum_{j=1}^r c_je_j \leqslant 2\sum_{j=1}^r e_j \leqslant 2er.$$

Далее, согласно предложению 1.4.7, $r \leqslant (k_0(\mathrm{Aut}(L)/L))^m k_0(S)$, поэтому, с учетом предложения 1.4.4:

$$d^m \leqslant 2(k_0(\mathrm{Aut}(L)/L))^m \cdot 3^{(m-1)/2} < 1,16(k_0(\mathrm{Aut}(L)/L))^m\sqrt{3^m}. \tag{12}$$

В некоторых случаях будет достаточно менее точной оценки:

$$d^m \leqslant 1,16|\mathrm{Out}(L)|^m \cdot \sqrt{3^m}. \tag{13}$$

В частности, если $m = 2$, то неравенства (13) и (15) запишутся так:

$$d^2 \leqslant 4(k_0(\mathrm{Aut}(L)/L))^2, \tag{14}$$

$$d^2 \leqslant 4|\mathrm{Out}(L)|^2. \tag{15}$$

Применим оценки (12), (13), (14) и (15) для групп, полученных в теореме 5.0.5 и следствии 5.0.6. В качестве значений $d(L)$ будем рассматривать SM-характеристики $m_\chi(L)$, вычисленные для указанных групп (см. таблицу 13).

Убедимся, что L не может быть изоморфна ни одной из групп: $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$ и $U_3(8)$, группы A_7 и $U_3(16)$ рассмотрим позднее.

Если $L \cong L_3(3)$, то порядок $|\mathrm{Out}(L)| = 2$, а $d(L) = 11$. Тогда, из (13) и (15) мы получаем противоречия: $11^m \leqslant 1,16 \cdot (2\sqrt{3})^m$, если $m > 2$ и $11^2 \leqslant 16$, если $m = 2$.

Аналогичным образом действуем и для оставшихся групп:

Если $L \cong L_3(8)$, то $|\mathrm{Out}(L)| = 6$, а $d(L) = 18$. Тогда $18^m \leqslant 1,16 \cdot (6\sqrt{3})^m$, если $m > 2$ и $18^2 \leqslant 144$ если $m = 2$.

Если $L \cong U_3(3)$, то порядок $|\mathrm{Out}(L)| = 2$, а $d(L) = 5$. Соответствующие противоречия получаются такими: $5^m \leqslant 1,16 \cdot (2\sqrt{3})^m$, если $m > 2$ и $5^2 \leqslant 16$ если $m = 2$.

Наконец, для группы $L \cong U_3(5)$ порядок $|\mathrm{Out}(L)| = 6$, а $d(L) = 23$. В этом случае из (13) следует, что $23^m \leqslant 1,16 \cdot (6\sqrt{3})^m$, а из (15) — что $23^2 \leqslant 144$.

Для групп $L_3(4)$ и $U_3(8)$ нам потребуется оценки (12) и (14).

Группа $\mathrm{Aut}(L_3(4))$ представляет собой расширение группы $L_3(4)$ диэдральной группой D_{12}. Поэтому, если $L \cong L_3(4)$, то $\mathrm{Aut}(L)/L \cong D_{12}$, и, следовательно, $k_0(\mathrm{Aut}(L)/L) = 6$. Зная, что $d(L) = 13$, мы получаем противоречия: $13^m \leqslant 1,16 \cdot (6\sqrt{3})^m$, если $m > 2$ и $13^2 \leqslant 144$, если $m = 2$.

Если $L \cong U_3(8)$, то $\mathrm{Aut}(L)/L \cong S_3 \times C_3$, и поэтому $k_0(\mathrm{Aut}(L)/L) = 9$. Далее, $d(L) = 33$, поэтому $33^m \leqslant 1,16 \cdot (9\sqrt{3})^m$, если $m > 2$ и $33^2 \leqslant 324$, если $m = 2$.

В силу полученных противоречий, мы исключили группы $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $U_3(3)$, $U_3(5)$ и $U_3(8)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $L \cong U_3(4)$. Порядок $|\mathrm{Out}(L)| = 4$, а $d(L) = 7$, поэтому мы получаем условие: $7^m \leqslant 2 \cdot 4^m \cdot 3^{(m-1)/2}$ из которого следует, что $m \leqslant 12$. Воспользуемся предложением 1.4.4b для оценки $k_0(S)$: $7^m \leqslant 2 \cdot 4^m \cdot 5^{m/4}$. Отсюда следует, что $m \leqslant 4$. Таким образом, возможными остаются случаи, когда $m = 2, 3$, или 4.

Для проверки этих случаев воспользуемся леммой 1.5.5. Нам известно, что если G — неразрешимая SM_2-группа, а χ_0 — ее неприводимый характер максимальной степени, то

$$\chi_0(1) < 2k(G). \tag{16}$$

Вычислим в GAP классовое число почти простых групп, с цоколем $U_3(4)$: $k(U_3(4)) = 22$, $k(U_3(4).C_2) = 20$, $k(U_3(4).C_4) = 22$. Пусть $m > 2$. Тогда в правой части неравенства (16) мы можем записать оценку:

$$2k(G) \leqslant 2 \cdot 22^m k_0(S) < 1,16(22\sqrt{3})^m.$$

С другой стороны, в группе $U_3(4)$ имеется неприводимый характер степени 75, в группе $U_3(4).2$ характер степени 150, а в группе $U_3(4).4$ характер степени 300. Поэтому, для левой части неравенства (16) можно записать: $75^m \leqslant \chi_0(1)$. Отсюда мы сразу получаем противоречие: $75^m < 1,16(22\sqrt{3})^m$.

Если же $m = 2$, то неравенство (16) примет вид: $75^2 \leqslant 4 \cdot 22^2 = 44^2$, откуда видно, что и этот случай невозможен. Таким образом и группа $U_3(4)$ исключается.

Нам осталось проверить две последние группы: A_7 и $U_3(16)$ для $m = 2$.

Пусть $L \cong A_7$. Тогда $|\mathrm{Out}(L)| = 2$, $d(L) = 17$. Неравенство (15) для этой группы запишется так: $17^2 \leqslant 16$, противоречие, поэтому и группа A_7 не подходит.

Пусть $L \cong U_3(16)$. Для вычисления $d(L)$ мы воспользуемся таблицей характеров группы $U_3(q)$ (таблица 7). Приведем здесь ненулевые значения характера χ_{r^2s} максимальной степени r^2s.

Таблица 16. Значения характера χ_{r^2s} группы $U_3(16)$

	$\{e\}$	C_2	C_3	$C'_{(k)}, 1 \leqslant k \leqslant 240$
$\|C_i\|$	1	$17 \cdot 15 \cdot 241$	$16 \cdot 17^2 \cdot 15 \cdot 241$	$16^3 17^2 15$
$\chi^{(1)}_{r^2s}$	$17^2 15$	-17	-1	$-\gamma^k - \gamma^{-16k} - \gamma^{256k}$

где γ - корень степени 241 из единицы.

Для вычисления скалярного произведения $[\chi^2_{r^2s}, \chi_{r^2s}]$ можно воспользоваться функцией `d_U3q` (см. приложение). Мы получили, что $d(L) = 19$. Подставим это значение в неравенство (13):

$$19^m \leqslant 1,16(8\sqrt{3})^m < 17^m.$$

Следовательно, и группа $U_3(16)$ исключается.

Проведенные рассуждения показывают, что среди возможных неабелевых простых групп L_i в нашем контрпримере могут быть только группы, изоморфные $L_2(q)$ — противоречие. Другими словами мы доказали, что рассматриваемого контрпримера не существует. Таким образом, верна:

Теорема 5.0.7. *Пусть G — неразрешимая SM_2-группа. Тогда ее неабелевы композиционные факторы изоморфны группе $L_2(q)$.*

6 Некоторые классы конечных SM_m-групп

6.1 Группы Фробениуса

Теорема 6.1.1. *Пусть $G \cong K \rtimes H$ — группа Фробениуса, $|K| = k$, $|H| = h$. Тогда для SM-характеристики $m_\chi(G)$ верна оценка:*

$$m_\chi(G) \geqslant \frac{h^2 - h}{k - 1}$$

Доказательство. Пусть ζ — неприводимый линейный характер группы K, $\zeta \neq 1_K$. Тогда $\psi = \zeta^G$ — неприводимый характер группы G (см. предложение 1.2.17). Покажем, что любой характер $\theta \in \mathrm{Irr}(G)$ входит в разложение ψ^2 с кратностью, не превышающей $\theta(1)$.

$$[\psi^2, \theta] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi^2(g)\overline{\theta(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in K} \psi^2(g)\overline{\theta(1)} =$$

$$= \frac{\theta(1)}{|G|} \sum_{g \in K} \psi^2(g) = \frac{\theta(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \psi^2(g) = \theta(1)[\psi, \overline{\psi}]$$

Если $\psi \sim \bar{\psi}$, то последнее выражение равно $\theta(1)$, иначе 0.

Поэтому

$$\psi^2 = \sum_{i=1}^{k(H)} \lambda_i \theta_i + \sum_{j=1}^{(k-1)/h} a_j \psi_j,$$

где $\theta_i \in \mathrm{Irr}(G)$, ψ_j — неприводимые нелинейные характеры G, и $\lambda_i \leqslant \theta_i(1)$. Тогда

$$\psi^2(1) = \sum_{i=1}^{k(H)} \lambda_i \theta_i(1) + \sum_{j=1}^{(k-1)/h} a_j \psi_j(1) \leqslant h + \sum_{j=1}^{(k-1)/h} a_j \psi_j(1).$$

Пусть a_0 — наибольшая из кратностей a_j. Тогда, поскольку степени характеров $\psi_j(1) = h$:

$$h^2 \leqslant h + a_0 h \frac{k-1}{h},$$

откуда $a_0 \geqslant \dfrac{h^2 - h}{k - 1}$. Теорема доказана.

□

В качестве первого примера приведем список некоторых метациклических групп Фробениуса $C_p \rtimes C_q$, для которых вычислена SM-характеристика $m_\chi(G)$:

1. Если $q = 3$, то $m_\chi(G) = 2$.

2. Пусть $q = 5$. Тогда если $p = 11$, то $m_\chi(G) = 3$, и $m_\chi(G) = 2$ для остальных $p \leqslant 541$.

3. Пусть $q = 7$. Тогда $m_\chi(G) = 3$, если $p = 29, 43$, и $m_\chi(G) = 2$ для остальных $p \leqslant 547$.

4. Пусть $q = 11$. Тогда $m_\chi(G) = 6$, если $p = 23$, $m_\chi(G) = 4$, если $p = 67, 89$, $m_\chi(G) = 3$, если $p = 199, 397$, и $m_\chi(G) = 2$ для остальных $p \leqslant 463$.

5. Пусть $q = 13$. Тогда $m_\chi(G) = 6$, если $p = 53$, $m_\chi(G) = 4$, если $p = 79, 131, 157, 313$, $m_\chi(G) = 3$, если $p = 521$, и $m_\chi(G) = 2$ для $p \leqslant 443, 547$.

Несмотря на то, что вычисления были ограничены значениями $p \leqslant 550$ и $q \leqslant 13$, общая тенденция вполне ясна. Если зафиксировать q, то, начиная с некоторого p, группа Фробениуса $C_p \rtimes C_q$ является SM_2-группой.

В последующих параграфах приведены результаты исследования некоторых разрешимых групп небольшого порядка на принадлежность к классу SM_2-групп. Как уже было доказано в [6] и [5], ASR-группы разрешимы, тем не менее, вопрос о кратностях неприводимых представлений для разрешимиых групп в общем случае остается открытым.

6.2 Строение групп порядков 32 и 64 с SM-характеристикой 2

В этом и последующих параграфах приводится описание структуры неабелевых 2-групп порядков 32, 64 и 128 с SM-характеристикой 2 и 4, их классовое число $k = k(L)$ и идентификатор в системе GAP.

Таблица 17. Группы порядка 32 с $m_\chi(G) = 2$

Строение группы	k	Id	Строение группы	k	Id
$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	11	6	$(C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2$	11	7
$(C_2 \times C_2).(C_4 \times C_2)$	11	8	$(C_2 \times D_8) \rtimes C_2$	11	43
$(C_2 \times Q_8) \rtimes C_2$	11	44			

Таблица 18. Группы порядка 64 с $m_\chi(G) = 2$

Строение группы	k	`Id(L)`	Строение	k	`Id(L)`
$((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	22	4	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_2$	22	109
$(C_4 \times C_2) \rtimes C_8$	22	5	$(C_4.D_8) \rtimes C_2$	22	111
$((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	19	$8, 163$	$(C_4 \times Q_8) \rtimes C_2$	22	121
$(C_2 \times Q_8) \rtimes C_4$	19	9	$Q_{16} \rtimes C_4$	22	122
$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_2$	19	$10, 155, 157,$ $159, 166$	$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_2)) \rtimes C_2$	22	$94, 98, 99,$ $102, 256$
$(C_4 \times C_2).(C_4 \times C_2)$	19	$11, 13, 14$	$(C_4 \wr C_2) \rtimes C_2$	22	125
$(C_4 \rtimes C_8) \rtimes C_2$	19	12	$(V_4 \times D_8) \rtimes C_2$	19	128
$(C_8 \times C_2) \rtimes C_4$	22	$18, 25$	$(V_4 \times Q_8) \rtimes C_2$	19	129
$C_4.(C_4 \times C_4)$	22	19	$(C_2 \times D_{16}) \rtimes C_2$	19	130
$(C_2 \times QD_{16}) \rtimes C_2$	19	$131, 141$	$(C_4 \times V_4) \rtimes C_4$	22	23
$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_2$	19	$132, 133, 145$	$(C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_4$	22	24
$(C_4 \times D_8) \rtimes C_2$	19	$140, 144$	$C_{16} \rtimes C_4$	22	28
$(Q_8 \rtimes C_4) \rtimes C_2$	19	$142, 164, 165$	$(C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2$	22	30
$[32, 7] \rtimes C_2$	13	32	$C_4 \rtimes Q_{16}$	19	143
$(C_2 \times (C_8 \rtimes C_2)) \rtimes C_2$	16	$149, 150$	$(C_4 \times V_4) \rtimes C_4$	13	33
$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_2$	16	$151, 154$	$[32, 6] \rtimes C_2$	13	34
$(C_2 \times QD_{16}) \rtimes C_2$	16	152	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_4$	13	35
$V_4.(C_4 \times C_2) \rtimes C_2$	13	36	$(C_2 \times D_{16}) \rtimes C_2$	16	$153, 177$
$(C_4 \times C_2).(C_4 \times C_2)$	13	37	$Q_8 \rtimes Q_8$	19	$156, 158$
$(C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2$	16	$41, 42$	$V_4.(C_2 \times D_8)$	19	160
$(C_2 \times (C_4 \rtimes C_4)) \rtimes C_2$	19	$161, 162$	$C_8.(C_4 \times C_2)$	16	43
$C_{16} \rtimes C_4$	16	46	$(Q_8 \rtimes C_4) \rtimes C_2$	16	170
$((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	16	171	$[32, 6] \times C_2$	22	90
$[32, 6] \rtimes C_2$	22	91	$V_4.(C_2 \times D_8)$	16	172
$[32, 7] \times C_2$	22	92	$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_2$	16	178
$C_2 \times ((C_2 \times D_8) \rtimes C_2)$	22	254	$C_8 \rtimes Q_8$	16	182
$(C_4 \times D_8) \rtimes C_2$	22	123	$[32, 8] \times C_2$	22	93
$C_2 \times ((C_2 \times Q_8) \rtimes C_2)$	22	255	$(Q_8 \rtimes C_4) \rtimes C_2$	22	100

6.3 Строение групп порядка 128 с SM-характеристикой 4

Таблица 19. Группы порядка 128 с $m_\chi(G) = 4$

Строение группы	k	`Id(L)`
$((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	20	$71, 922$
$(C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_4$	20	72
$(C_4.(C_4 \times C_4)) \rtimes C_2$	20	73
$C_2.(((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) = (C_8 \times C_2).(C_4 \times C_2)$	20	74
$(C_{16} \rtimes C_4) \rtimes C_2$	20	$87, 971$
$C_2.((C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_2) = (C_4 \times C_4).(C_4 \times C_2)$	20	88
$((C_4 \times C_4) \rtimes C_4) \rtimes C_2$	14	138
$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_4$	14	$139, 144$
$C_2.((C_4 \times C_4) \rtimes C_4) = (C_4 \times C_4).(C_4 \times C_2)$	14	145
$(C_2 \times ((C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2)) \rtimes C_2$	23	853
$(((C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	23	854
$((C_4 \times V_4) \rtimes C_4) \rtimes C_2$	23	855
$(C_2 \times (((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2)) \rtimes C_2$	23	859
$((((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	23	860
$((C_4 \times C_4) \rtimes C_4) \rtimes C_2$	23	861
$(C_2 \times (C_2.((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) = V_4.(C_4 \times C_2))) \rtimes C_2$	23	865
$((C_2.((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) = V_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	23	866
$(C_2.(((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) = (C_4 \times C_2).(C_4 \times C_2)) \rtimes C_2$	23	867
$(C_2.((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) = C_8.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_2$	23	912
$(C_{16} \rtimes C_4) \rtimes C_2$	23	913
$((C_2 \times Q_{16}) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	20	923
$(((C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	17	931
$((C_4 \times V_4) \rtimes C_4) \rtimes C_2$	17	$932, 933$
$((C_2.((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) = V_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	17	934
$(C_2.(((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) = (C_4 \times C_2).(C_4 \times C_2)) \rtimes C_2$	17	935
$((C_4.D_8 = C_4.(C_4 \times C_2)) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	20	970
$((C_2 \times D_{16}) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	26	2020
$((C_2 \times QD_{16}) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	26	2021

6.4 Количество разрешимых неабелевых групп с заданнной SM-характеристикой

Таблица 20. Группы порядка 6–94

$\|G\|$	6	10	12	14	16	18	20	21	22	24	26	27	28	30	34	36	38
$m_\chi(G)$																	
1	2	1	2	1	9	3	2		1	10	1		2	3	1	7	1
2			1					1		2						3	
3							1					2					

$\|G\|$	39	40	42	44	46	48	50	52	54	55	56	57	58	60	62	63	66
$m_\chi(G)$																	
1		9	3	2	1	35	3	2	7		9		1	7	1		3
2	1		1			12		1	1			1		1		2	
3		2							4	1				2			
5			5														
6											1						

$\|G\|$	68	70	72	74	75	76	78	80	81	82	84	86	88	90	92	93	94
$m_\chi(G)$																	
1	2	3	33	1		2	3	33		1	7	1	9	8	2		1
2	1		9		1		1	5			4					1	
3							1	9	10								
5											2						
7			2														

Таблица 21. Группы порядка 96–186

$\|G\|$	96	98	100	102	104	105	106	108	110	111	112	114	116	117
$m_\chi(G)$														
1	156	3	7	3	9		1	18	3		33	3	2	
2	222				11	1		28		1	37	5	3	2
3	224		12					39	4					
6											38			
9									5					

$\|G\|$	118	120	122	124	125	126	129	130	132	134	135	136	138	140
$m_\chi(G)$														
1	1	32	1	2		8		3	7	1		9	3	7
2		4				3	1		1			2		
3		5									2			2
4												1		
5					2	3								

$\|G\|$	142	144	146	147	148	150	152	154	155	156	158	160	162	164
$m_\chi(G)$														
1	1	127	1		2	8	9	3		7	1	150	15	2
2		54		4	1	3			1	6		41	6	1
3										2		40	29	
4		2												
7		4												
11												16		

$\|G\|$	165	166	168	170	171	172	174	176	178	180	182	183	184	186
$m_\chi(G)$														
1		1	32	3		2	3	33	1	22	3		9	3
2			12		2			4		4		1		2
3	1									6				
4														
5			8		1									
6			1											

Таблица 22. Группы порядка 188–250

$\|G\|$	188	189	190	192	194	195	196	198	200	201	202	203	204	205
$m_\chi(G)$														
1	2		3	876	1		7	8	31		1		7	
2		4		618		1	1			1			3	1
3		6		7					15			1		
4				16										
8				6										

$\|G\|$	206	208	210	212	214	216	218	219	220	222	224	225	226	228
$m_\chi(G)$														
1	1	33	7	2	1	86	1		7	3	39		1	7
2		13	2	1		38		1		5	188	2		6
3						38			4					
5			2											
6											2			
7						6								
9									2					

$\|G\|$	230	231	232	234	236	237	238	240	242	243	244	246	248	250
$m_\chi(G)$														
1	3		9	8	2		3	125	3		2	3	9	7
2		1	11	11		1		166			3			
3				14				192		49				8
5														12
6								194						
9										60				
14								195						

Таблица 23. Группы порядка 252–315

$\|G\|$	252	253	254	258	260	262	264	266	268	270	272	273	274	275
$m_\chi(G)$														
1	22		1	3	7	1	32	3	2	17	33		1	
2	12			2	2		4			1	13	4		
3					4					9				2
4	1										2			
5	7													
6		1												
15											1			

$\|G\|$	276	278	279	280	282	284	285	286	288	290	291	292	294	296
$m_\chi(G)$														
1	7	1		31	3	2		3	633	3		2	8	9
2	1		2				1		366		1	1	6	2
3				5					5					
4									7					
5													7	
6				1										
7									20					

$\|G\|$	297	298	300	301	302	304	305	306	308	309	310	312	314	315
$m_\chi(G)$														
1		1	23		1	33		8	7		3	32	1	
2			9			4	1			1	1	6		2
3	2		10	1								8		
4											1			
6			2											
11												2		

Таблица 24. Группы порядка 316–358

$\|G\|$	316	318	320	322	324	326	327	328	330	332	333	334	336	338
$m_\chi(G)$														
1	2	3	860	3	43	1		9	7	2		1	125	3
2			517		36		1	2			2		61	
3			244		74			1	2					
4			8		2						1			
5					1								32	
6					10								2	
9									2					

$\|G\|$	340	342	343	344	346	348	350	351	352	354	355	356	357	358
$m_\chi(G)$														
1	7	8		9	1	7	8		149	3		2		1
2	2	6				3		4	39		1	1	1	
3	4							6						
5		1												
7			2					1						
17		1												

Таблица 25. Группы порядка 358–400

$\|G\|$	358	360	362	363	364	366	368	370	372	374	375	376	378	380
$m_\chi(G)$														
1	1	107	1		7	3	33	3	7	3		9	17	7
2		20		1	2	2	4		6		2		9	
3		18											16	2
5											2		15	
7		5												

|G|	381	382	384	385	386	387	388	390	392	394	396	398	399	400
$m_\chi(G)$														
1		2	11229		2		4	8	31	1	22	1		118
2	2		8521			4	6	12	5		26		4	139
3			29	2				16						210
4			336											
5			1											
6			1						2					
8			37											
9														212

Заключение

В качестве заключения стоит добавить, что хотя структура неразрешимых SM_2-групп описывется достаточно четко, остается ряд вопросов, которые могут представлять интерес.

Вопрос 1. Было установлено, что неабелевы композиционные факторы неразрешимой SM_2-группы изоморфны группе $L_2(q)$. Тем не менее, неизестно количество таких факторов. Для групп небольших порядков оказалось, что такой фактор всего один. Вопрос, какое количество будет в общем случае?

Вопрос 2. Экспериментально было установлено, что SM-характеристика конечных p-групп небольших порядков равна p^t, $t \geqslant 0$. Верно ли это в общем случае?

Вопрос 3. Какие из 2-групп являются SM_2-группами? Есть основания полагать, что SM-характеристика связана со ступенью разрешимости этих групп.

Список литературы

[1] Белоногов, В.А. Представления и характеры в теории конечных групп / В.А.Белоногов. - Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. - 378 с.

[2] Белоногов, В.А. Матричные представления в теории конечных групп / В.А.Белоногов, А.Н.Фомин. - М.: Наука, 1976. - 125 с.

[3] Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д.Горенстейн. - М.: Мир, 1985. - 352 с.

[4] Джеймс, Г. Теория представлений симметрических групп / Г.Джеймс. - М.: Мир, 1982. - 214 с.

[5] Казарин, Л.С. Конечные просто приводимые группы разрешимы / Л.С.Казарин, Е.И.Чанков // Математический сборник, 2010. - Т.201. - N 5. - С.27-40.

[6] Казарин, Л.С. О конечных просто приводимых группах / Л.С.Казарин, В.В.Янишевский // Алгебра и анализ, 2007. - Т.19. - N 6. - С.86-116.

[7] Кострикин, А.И. Введение в алгебру, часть 3. Основные структуры алгебры / А.И.Кострикин. - М.: Физ.-мат. лит., 2001. - 272 с.

[8] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Издание 16-е, дополненное, включающее Архив решенных задач / Новосибирск: ИМ СО РАН, 2006. - 193 с.

[9] Старостин, А.И. О группах Фробениуса / А.И.Старостин // Украинский математический журнал. - 1971. - Т.23. - N 5. - С.629-639.

[10] Струнков, С.П. О расположении характеров просто приводимых групп / С.П.Струнков // Математические заметки. - 1982. - Т.31. - N 3. - С.357-362.

[11] Хамермеш, М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам / М.Хамермеш. - М.: Мир, 1966. - 588 с.

[12] Холл, М. Теория групп / М. Холл. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. - 468 с.

[13] Холл, М. Комбинаторика / М. Холл. - М.: Мир, 1970. - 424 с.

[14] Adan-Bante, E. Squares of characters and finite groups. / E.Adan-Bante // J. Algebra. - 2007. - 310(2). - p.619-623.

[15] Adan-Bante, E. Products of characters and finite p-groups. / E.Adan-Bante // J. Algebra. - 2004. - 277(1). - p.236-255.

[16] Adan-Bante, E. Products of characters and finite p-groups II. / E.Adan-Bante // Arch. Math. - 82. - 2004. - p.289-297.

[17] Adan-Bante, E. Products of characters and finite p-groups III. [Электронный ресурс] / E.Adan-Bante // ArXiv:math/0401328 [math.GR]. Режим доступа http://arxiv.org/pdf/math/0401328v1.pdf

[18] Adan-Bante, E. Products of characters with few irreducible constituents. / E.Adan-Bante // J. Algebra. - 2007. - 311(1). - p.38-68.

[19] Bierbrauer, J. The uniformly 3-homogeneous subsets in $PGL_2(q)$ / J.Bierbrauer // J. Algebraic Combinatoric. - 1995. - Vol.4. - p.99-102.

[20] Brauer, R. On Groups of Even Order / R.Brauer, K.A.Fowler //The Annals of Mathematics, Second Series. - Vol.62, - N 3. Nov., 1955, - p.565-583

[21] Carter, R.W. Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters / R.W.Carter. - Chichester, etc., Willey, 1985. - 556p.

[22] Ceccherini-Silberstein, T. Clifford theory and applications./ T.Ceccherini-Silberstein, F.Scarabotti, F.Tolli // Journal of Math. Sciences, 2009. - Vol.156, - N 1. - p.29-43.

[23] Conway, J.H. Atlas of Finite Groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. - Oxford: Clarendon Press. - 1985. - 253p.

[24] Feit, W. Characters of finite groups / W.Feit - N.Y., Amsterdam: W.A.Benjamin Inc., 1967. - 186p.

[25] Fulton, W. Representation theory. A first course/ W.Fulton, J.Harris. - Springer, 1991. – 551p.

[26] Gallagher, P.X. The number of conjugacy classes in a finite group / P.X. Gallagher // Math. Z., 1970. - Vol.118. - N 3. - p.175-179.

[27] Gorenstein, D. Finite groups / D.Gorenstein. - N.Y.: Harper and Row, 1968. - 519p.

[28] Isaacs, I.M. Character theory of finite groups / I.M.Isaacs. - N.Y.: Acad. Press, 1976. – 320p.

[29] Kazarin, L.S. On the degrees of irreducible characters of finite simple groups / L.S.Kazarin, I.A.Sagirov // Proc. of the Steklov Inst. Math. Suppl. - 2001, - Vol.2. - p.71-81.

[30] Kovács, L.G. On the number of conjugacy classes of a finite group / L.G.Kovács, G.R.Robinson // J. Algebra, - 1993. - Vol.160. - N 2. - p.441-460.

[31] Liebeck, M.W. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups / M.W. Liebeck, C.E. Praeger, J. Saxl // Memoirs of the AMS. - 1990. - Vol.86. - N 432. - p. 1-151.

[32] Liebeck, M.W. Upper bounds for the number of conjugacy classes of a finite group / M.W.Liebeck, L.Pyber // J. Algebra. - 1997. - N 198. - p.538-562.

[33] Macdonald, I.G. Numbers of conjugacy classes in some finite classical groups / I.G.Macdonald. // Bull. Austral. Math. Soc. - 1981. - Vol.23. - N 1. - p.23-48.

[34] Mackey, G.W. Multiplicity free representations of finite groups/ G.W.Mackey // Pacific. J. Math., 1958. - Vol.8. - N 3. - p.503-510.

[35] Mackey, G.W. Symmetric and anti symmetric kroneker squares and interwining numbers of induced representations of finite groups/ G.W.Mackey // Amer. J. Math., 1953. - Vol.75. -N 3. - p.387-405.

[36] Maróti, A. Bounding the number of conjugacy classes of a permutation group./ A. Maróti // Journal of Group Theory, 8, 2005, - N 3, - p.273-289.

[37] Maróti, A. On elementary lower bounds for the partition function. [Электронный ресурс]/ A.Maróti // Integers: Electronic J. Comb. Number Theory, 2003. - N 3 - 9p.
Режим доступа:

http://www.renyi.hu/∼maroti/partition.pdf

[38] McKay, J. The non-abelian simple groups G, $|G| \leqslant 10^6$ — character tables / J. McKay // Commun. Algebra, 1979. - Vol.7. - N 13. - p.1407-1445.

[39] Simpson, W.A. The character tables for $SL(3,q)$, $SU(3,q)$, $PSL(3,q)$, $PSU(3,q)$. / W.A.Simpson, W.A.Frame // Can. J. Math., 1973 - Vol.XXV. - N 3. - p.486-494.

[40] The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.10 [Электронный ресурс]/ Aachen, St. Andrews, 2008.
Режим доступа:

http://www.gap-system.org

[41] Wigner, E.P. On representations of certain finite groups / E.P.Wigner // Amer. J. Math., 1941. - Vol.63. - p.57-63.

Приложения

Вычисления в системе GAP

Система компьютерной алгебры GAP — это программное обеспечение, основное применение которого — вычисления в дискретных алгебраических структурах.

В настоящей работе главным образом использовались инструменты для работы с конечными группами.

Далее будет приведена некоторая информация об основных командах системы GAP, которые использовались при отдельных вычислениях, и в специально составленных функциях.

Оновные команды в GAP для работы с конечными группами

Основная информация о группах может быть получена с помощью команд:

`SmallGroup(n,m)` — группа порядка n с номером m.

`Size()` — порядок группы, класса сопряженности, длина списка.

`Index(G,N)` — индекс подгруппы N в G,

`StructureDescription(G)` — описание строения группы G.

`IsSimple(G)`, `IsSolvabe(G)` — проверка группы G на простоту и разрешимость.

`DerivedSubgroup(G)` — коммутант группы G.

`AutomorphismGroup(G)` — группа автоморфизмов группы G.

Группы, используемые в работе

Следующие команды задают группы, используемые в работе:

`PSL(n,q)` или `ProjectiveSpecialLinearGroup(n,q)` — группа $L_n(q)$.

`PSU(n,q)` или `ProjectiveGeneralUnitaryGroup(n,q)` — группа $U_n(q)$.

`PGL(n,q)` или `ProjectiveGeneralLinearGroup(n,q)` — группа $PGL_n(q)$.

`PGU(n,q)` или `ProjectiveGeneralUnitaryGroup(n,q)` — группа $PGU_n(q)$.

`PSp(n,q)` или `ProjectiveSymplecticGroup(n,q)` — группа $PSp_n(q)$.

`AlternatingGroup(n)` — знакопеременная группа A_n.

`SymmetricGroup(n)` — симметрическая группа S_n.

`MathieuGroup(n)` — группа Матье M_n, $n = 9, 10, 11, 12, 21, 22, 23, 24$.

`SuzukiGroup(q)` — группа $^2B_2(q)$.

`SmallGroup(1440,5841)` — группа $P\Gamma L_2(9)$.

Подгруппы конечной группы

Для нахождения списка подгрупп определенной конечной группы G можно использовать такую серию команд:

```
L:=ConjugacyClassesSubgroups(G);
S:=List(L,x->x[1]);
```

Если требуется найти список нормальных подгрупп, то используется команда:

```
NormalSubgroups(G)
```

Автоморфизмы конечной группы

При анализе почти простых групп в некоторых случаях требовалось выяснить строение группы их внешних автоморфизмов. Следующие команды позволяют получить эту группу:

```
A:=AutomorphismGroup(G);
I:=InnerAutomorphismsAutomorphismGroup(A);
Out:=A/I;
```

Определение числа классов сопряженных элементов

Основной функцией в GAP для вычисления классового числа $k(G)$ конечной группы G является функция:

```
NrConjugacyClasses(G)
```

Тем не менее, для некоторых отдельных случаев групп существуют более быстрые алгоритмы вычисления классового числа (см. например [34]).

Для групп $L_n(q), U_n(q)$, $PGL_n(q)$, $PGU_n(q)$ более эффективными являются функции:

```
NrConjugacyClassesPSL(n,q), NrConjugacyClassesPSU(n,q),
NrConjugacyClassesPGL(n,q), NrConjugacyClassesPGU(n,q).
```

Вычисление классового числа знакопеременной группы A_n

Если G — знакопеременная группа, то ее классовое число можно определить, пользуясь результатами главы 1. Следующие функции определяют количество разбиений, у которых диаграмма Юнга не является симметричной, а также классовое число с помощью формулы:

$$k(A_n) = \frac{p(n) - a(n)}{2} + 2a(n) = \frac{p(n) + 3a(n)}{2},$$

где $a(n)$ — количество разбиениий числа n с симметричной диаграммой.

```
NrConjugacyClassesAn := function(n)
   local s;
   s:=0;
   for i in [1..n] do
      s:=s+Number(Partitions(n,i),x->IsSym(x));
   od;
   return (NrPartitions(n)+3*s)/2;
end;
```

IsSym — функция, определяющая, является ли симметричной диаграмма Юнга, соответствующая разбиению L:

```
IsSym := function(L)
   local X;
   X:=ShallowCopy(L);
   while X<>[] do
      if X[1]<>Size(X) then
         return false;
      else
         Remove(X,1);
         X:=Filtered(List(X,x->x-1),x->IsPosInt(x));
      fi;
   od;
   return true;
end;
```

Неприводимые представления и характеры

В изучении неприводимых характеров группы полезными оказываются следующие команды:

`CharacterTable(G)` — таблица характеров группы G.

`SizesConjugacyClasses(T)`, `SizesCentralizers(T)` — размеры классов сопряженных элементов и порядки централизаторов для таблицы характеров T.

`CharacterDegrees(G)` или `CharacterDegrees(T)` — список степеней неприводимых характеров группы G с таблицей характеров T.

`Irr(G)` или `Irr(T)` — список неприводимых характеров группы G с таблицей характеров T.

`ScalarProduct(x,y)` — скалярное произведение характеров x и y.

Нахождение значений неприводимых характеров — достаточно трудоемкая с точки зрения вычислений процедура. Для групп больших порядков удобно использовать в GAP пакет AtlasRep. Список доступных таблиц характеров в этом пакете выводится командой:

```
AllCharacterTableNames()
```

В дальнейшем можно получить таблицу по ее имени, например:

```
CharacterTable("L3(4).6")
```

— таблица расширения группы $L_3(4)$ циклической группой порядка 6.

Вычисление степеней характеров знакопеременной группы A_n

Для вычисления степеней неприводимых характеров группы A_n в случае больших n была использована специально написанная функция:

```
CharDegreesAn(n)
```

Для числа n формируется список всех его разбиений, затем для каждого разбиения составляется диаграмма Юнга `X` и симметричная ей `ReX`. По `X` и `ReX` вычисляется степень `p1` характера для соответствующего разбиения. В том случае, когда диаграмма Юнга симметричная, в список степеней записываются два значения `p1/2`. В результате получается упорядоченный список степеней неприводимых характеров `ch`.

```
CharDegreesAn:=function(n)
   local ch,f,Part,X,ReX,X1,i,j,s,p,p1;
   if n<1 then return fail;
   elif n<=3 then return 1;
   else
      ch:=[];
      f:=Factorial(n);
      Part:=Partitions(n);
      while Part<>[] do
         ReX:=[];
         X:=Part[1];
         X1:=ShallowCopy(X);
         s:=Size(X);
         for i in [1..X1[1]] do
            ReX[i]:=Size(X1);
            X1:=Filtered(X1,x->x>i);
         od;
         p:=1;
         for i in [1..s] do
            for j in [1..X[i]] do
               p:=p*(ReX[j]+X[i]-i-j+1);
            od;
         od;
         p1:=f/p;
         if X=ReX then
            Add(ch,p1/2);
            Add(ch,p1/2);
         else
            Add(ch,p1);
            Remove(Part,Position(Part,ReX));
         fi;
```

```
      Remove(Part,Position(Part,X));
    od;
    return Collected(ch);
  fi;
end;
```

Кратности в разложении квадратов неприводимых представлений

Основным инструментом для для определения того, к какому классу SM_m-групп принадлежит рассматриваемая группа служит функция:

```
SM(ChTable)
```

В ней для каждой пары неприводимых характеров `i`, `j` из таблицы `ChTable` вычисляется скалярное произведение `ScalarProduct(i^2,j)`, значение которого вносится в список `sp` вместе со значениями степеней этих характеров. В результате функция `SM` выдает элемент списка `sp`, с максимальным значением `sp[1]`.

```
SM := function(ChTable)
  local I, size, i, j, sp;
  I:=Irr(ChTable);
  size:=Size(I);
  sp:=[];
  for i in I do
    for j in I do
      Add(sp,[ScalarProduct(i^2,j),i[1],j[1]]);
    od;
  od;
  sp:=Maximum(sp);
  return [sp[1],sp[2],sp[3],size];
end;
```

Вычисления для спорадических групп

Определение SM-класса для спорадических групп было получено с помощью функции `SM` для таблиц характеров из пакета AtlasRep:

```
Spor:=["M11","M12","M22","M23","M24","J1","J2","J3","J4",
       "Co1","Co2","Co3","Fi22","Fi23","Fi24'","Suz","He",
       "HS","McL","HN","Th","B","M","O'N","Ru","Ly"];;
AutSpor:=["M12.2","M22.2","J2.2","J3.2","Fi22.2","Fi24'.2",
          "Suz.2","He.2","HS.2","McL.2","HN.2","O'N.2"];;
Append(Spor,AutSpor);
for i in Spor do
   ct:=CharacterTable(i);
   m:=SM(ct);
   Print(i," SM_",m[1],"\n");
od;
```

Вычисления для групп $L_3(q)$

Для групп $L_3(q)$ вычислялись значения скалярного произведения $[\chi^2_{r^2s}, \chi_{r^2s}]$, другими словами, кратность вхождения характера χ_{r^2s} в свой квадрат. При вычислении этого значения использовалась таблица характеров групппы $L_3(q)$. Приведем здесь функцию, написанную в GAP для вычисления этого скалярного произведения:

```
d_U3 := function(q)
    local r,s,t,t2,L,T3;
    r:=q+1; s:=q-1;
    t:=q^2-q+1; t2:=(t-1)/6;
    L:=List([1..t-1],x->-(E(t)^x+E(t)^(-q*x)+E(t)^(q^2*x)));
    L:=List(Collected(L),x->x[1]);;
    T3:=Sum(List(L,x->x^2*ComplexConjugate(x)));;
    return ((r^2*s)^2-(r^2+q)*t+T3*q^3)/(q^3*t);
end;
```

Как оказалось, для небольших q, $(q+1,3)=1$ эта кратность будет равна $q+3$. Полученное значение $d(U_3(q))$ использовалось в главе 5.

Определение количества SM_2 и SM_4-групп порядка 2^t

```
Nr2Groups := function(n)
   local sp,L,L2;
   sp:=[];
   L:=Filtered(AllSmallGroups(n),x->not IsAbelian(x));
   L2:=Filtered(L,x->IsAbelian(DerivedSubgroup(x)));
   Add(sp,["nonabelian",Size(L)]);
   Add(sp,["metabelian",Size(L2)]);
   L:=Filtered(L,x->SM(x)[1]>1);
   L2:=Filtered(L,x->IsAbelian(DerivedSubgroup(x)));
   Add(sp,["nonabelian SM_2",Size(L)]);
   Add(sp,["metabelian SM_2",Size(L2)]);
   return sp;
end;
```