На правах рукописи

ПРОХОРОВА ТАТЬЯНА ВЯЧЕСЛАВОВНА

О ГРУППЕ БРАУЭРА АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АФТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2008

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии
Владимирского государственного университета.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор **Танкеев Сергей Геннадьевич**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Краснов Вячеслав Алексеевич,**

доктор физико-математических наук, профессор **Журавлев Владимир Георгиевич**

Ведущая организация – Математической институт РАН им. В.А. Стеклова.

Защита диссертации состоится 13 февраля 2009 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144, аудитория 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Автореферат разослан 22 декабря 2008 года.

Ученый секретарь диссертационого совета С.И. Яблокова

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Вычисление группы Брауэра числового поля является одним из самых важных достижений алгебраической теории чисел. В настоящее время возрос интерес к группам Брауэра схем. Актуальность темы обусловлена как задачами внутри самой алгебраической геометрии, так и многочисленными приложениями в диофантовой геометрии и теории чисел. Так группу Брауэра поля k можно определить как группу классов подобия центральных простых алгебр над k или, что эквивалентно, как группу когомологий

$$H^2(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k),(k^{\mathrm{s}})^{\times}) = H^2((\mathrm{Spec}\, k)_{et}, \mathbb{G}_m),$$

где k^{s} – сепарабельное замыкание поля k. Оба эти определения обобщаются на случай схем, но приводят при этом к разным группам. Первая из них $\mathrm{Br}(X)$ – группа классов подобных алгебр Адзумаи над X, называется *группой Брауэра* схемы X, а вторая $\mathrm{Br}'(X) = H^2(X_{et}, \mathbb{G}_m)$ – *когомологической группой Брауэра*. Всегда имеется включение $\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(X)$. Каждый класс когомологий из $H^1(X, \mathbb{G}_m)$ представим некоторым обратимым пучком. С геометрической точки зрения группа Брауэра классифицирует классы 2-когомологий, не приходящие из алгебраических дивизориальных циклов, т. е. она классифицирует трансцендентные классы. Первоначально алгебры Адзумаи изучались над локальными кольцами самим Адзумаи[1], над произвольными кольцами их изучали Ауслендер и Голдман[2], а над схемами – А. Гротендик[3]. А. Гротендик первым дал удовлетворительное когомологическое описание групп Брауэра. Ю. И. Манин использовал группу Брауэра для изучения арифметики и геометрии кубических поверхностей[4]. Одним из самых интересных вопросов, касающихся группы Брауэра, является гипотеза М. Артина о том, что группа $\mathrm{Br}(X)$ собственной схемы $X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ конечна[5]. Кроме того, если X – абелево многообразие над конечным полем $\mathbb{F}_q$, то $\mathrm{Br}(X)$ конечна в силу теоремы Тэйта[6].

Вопрос о конечности l-примарных компонент групп Брауэра арифметических схем, проективных и плоских над спектром кольца целых числового

[1] Azumaya G. On maximally central algebras // Nagoya, Math. – 1951. – V. 2. – P. 119–150.

[2] Auslander M., Goldman O. The Brauer group of a commutative ring // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 97. – P. 367–409.

[3] Grothendieck A. Le groupe de Brauer. I. Algébres d' Azumaya et interprétations diverses, II. Théorie cohomologique, III. Exemples et compléments // In: Dix Exposés sur la Cohomologie de Schémas, North - Holland, Amsterdam. – 1968. – P. 46–188.

[4] Манин Ю.И. Кубические формы: Алгебра, геометрия, арифметика. – М.: Наука, 1972.

[5] Милн Дж. Этальные когомологии. – М.: Мир, 1983.

[6] Tate J. Endomorphisms of abelian varieties over finite fields // Invent. Math. – 1966. – V. 2. – P. 134–144.

поля, изучался С.Г. Танкеевым[7,8,9].

Цель работы

Целью диссертационной работы является доказательство конечности l-примарной компоненты группы Брауэра арифметической модели гладкого регулярного многообразия над глобальным полем конечной характеристики при условии, что для этого многообразия верна гипотеза Тэйта для дивизоров.

Основные методы исследования

В основе исследований лежат методы теории этальных когомологий, с использованием классических результатов теории групп Брауэра схем в стиле А. Гротендика.

Научная новизна

Научная новизна работы заключается в том, что впервые исследованы взаимоотношения между гипотезой Тэйта для дивизоров на регулярном общем схемном слое V проективного морфизма $\pi : X \to C$ на проективную гладкую кривую C над конечным полем и гипотезой Тэйта для дивизоров на X. В частности, если верна гипотеза Тэйта для дивизоров на регулярном гладком проективном многообразии V над глобальным полем положительной характеристики, то l-примарная компонента группы $\mathrm{Br}'(X)$ конечна и верна гипотеза Тэйта для дивизоров на X, где X – гладкая проективная модель V над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и могут найти применение в диофантовой геометрии и теории чисел. Могут быть полезны при чтении специальных курсов студентам математических факультетов университетов.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на научно-технической конференции факультета информатики и прикладной математики (Владимир, 2003 г.), на Международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 2007г.), а так же неоднократно обсуждались на научных семинарах по алгебраической геометрии ВлГУ

[7]Танкеев С.Г. О группе Брауэра // Изв. РАН. Сер. матем. – 2000. – Т. 64. – №4. – С. 141–162.

[8]Танкеев С.Г. О группе Брауэра арифметической схемы // Изв. РАН. Сер. матем. – 2001. – Т. 65. – №2. – С. 155–186.

[9]Танкеев С.Г. О группе Брауэра арифметической схемы. II // Изв. РАН. Сер. матем. – 2003. – Т. 67. – №5. – С. 155–176.

под руководством доктора физико-математических наук, профессора С.Г. Танкеева.

Публикации автора

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[3], в том числе одна работа – в журнале из перечня ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 25 наименований, включая работы автора. Полный объем диссертации составляет 64 страницы машинописного текста.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность изучаемой проблемы, поставлены цели и задачи исследования, приведены формулировки основных результатов диссертационной работы.

Глава 1 содержит обзор работ и основных результатов по теме диссертации, известных из литературы. В этой же главе приводятся основные понятия и обозначения, а также сведения о группе Брауэра, используемые в диссертации.

В §1 вводятся понятия: плоский гомоморфизм колец, плоский морфизм схем, неразветвленный и этальный морфизмы схем.

В §2 вводится понятие этальной топологии, описывается ее связь с топологией Зариского. В этом параграфе мы следуем Мамфорду [10].

В §3 рассматриваются когомологии пучков.

В §4 рассматривается один из интересных инвариантов наших топологий – группа Пикара $\mathrm{Pic}(X)$. Группа $\mathrm{Pic}(X)$ определяется как группа когомологий

$$H^1(X_{et}, \mathcal{O}^\times) = H^1(X_{et}, \mathbb{G}_m)$$

и классифицирует обратимые пучки на X (т. е. пучки, локально изоморфные структурному пучку $\mathcal{O}_X$).

В §5 определяется когомологическая группа Брауэра $H^2(X_{et}, \mathbb{G}_m)$.

[10]Mumford D. Picard groups of modular problems // Arithmetical Algebraic Geometry. New York: Harper and Row. – 1965. – P. 33–81.

Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ – схема. *Когомологической группой Брауэра* схемы X называется

$$H^2(X_{et}, \mathbb{G}_m) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Br}'(X) \tag{1}$$

Существует несколько эквивалентных определений группы Брауэра поля k:

1) группа Брауэра поля k – группа классов подобия центральных простых алгебр над k;

2) группа Брауэра поля k – группа когомологий

$$H^2(\operatorname{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k), (k^{\mathrm{s}})^*) = H^2((\operatorname{Spec} k)_{et}, \mathbb{G}_m), \tag{2}$$

где k^{s} – сепарабельное замыкание поля k. Оба эти определения обобщаются на случай схем, но приводят при этом к разным группам. Первая из них $\operatorname{Br}(X)$ – группа классов подобия пучков алгебр Адзумаи над X, называется *группой Брауэра* схемы X, а вторая $\operatorname{Br}'(X) = H^2(X_{et}, \mathbb{G}_m)$ – *когомологической группой Брауэра*. Известно, что $\operatorname{Br}(X) \hookrightarrow \operatorname{Br}'(X)$. Каждый класс когомологий из $H^1(X, \mathbb{G}_m)$ представим некоторым обратимым пучком. С геометрической точки зрения группа Брауэра классифицирует классы 2-когомологий, не приходящие из алгебраических дивизориальных циклов, т. е. она классифицирует трансцендентные классы.

В §6 вводится понятие алгебры Адзумаи над R, где R – коммутативное локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$.

В §7 вводится понятие алгебры Адзумаи над схемой X и рассмотрена группа Брауэра схемы. Выясняется связь $\operatorname{Br}(X)$ с группой когомологий $H^2(X_{et}, \mathbb{G}_m)$.

В §8 формулируется гипотеза М. Артина о том, что для схемы X, собственной над $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, группа Брауэра $\operatorname{Br}(X)$ конечна [11]. Для схемы X размерности 1 классическая теория полей классов дает утвердительный ответ на вопрос М. Артина, однако уже в случае поверхностей над конечным полем возникают серьезные трудности. Хорошо известно, что если X – абелево многообразие над конечным полем $\mathbb{F}_q$, то $\operatorname{Br}(X)$ конечна в силу теоремы Тэйта [12].

В §9 приводятся классические результаты о группах Брауэра.

Глава 2 содержит основные результаты диссертации, относящиеся к группам Брауэра.

Пусть X – гладкое проективное многообразие над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p, $\operatorname{Br}(X)$ – группа Брауэра, $\operatorname{Br}'(X) = H^2(X_{et}, \mathbb{G}_m)$ – когомологическая группа Брауэра.

---

[11] Милн Дж. Этальные когомологии. – М.: Мир, 1983.

[12] Tate J. Endomorphisms of abelian varieties over finite fields // Invent. Math. – 1966. – V. 2. – P. 134–144.

В дальнейшем для любого пучка групп $\mathcal{F}$ на X_{et} мы будем обозначать группу когомологий $H^i(X_{et}, \mathcal{F})$ через $H^i(X, \mathcal{F})$.

Пусть C – гладкая проективная кривая над конечным полем $\mathbb{F}_q$, $k = \mathbb{F}_q(C)$ – поле рациональных функций на кривой C. По определению, поле k является *глобальным полем* положительной характеристики p. Обозначим через k^{s} сепарабельное замыкание поля k, а через $\overline{k}$ – алгебраическое замыкание поля k.

Предположим, что имеется сюръективный $\mathbb{F}_q$-морфизм гладких проективных многообразий $\pi : X \to C$ с гладким общим слоем V и приведенными схемными слоями, причем $V(k) \neq \varnothing$. Пусть $V \otimes \overline{k}$ – регулярное многообразие в том смысле, что $H^1(V \otimes \overline{k}, \mathcal{O}_{V\otimes\overline{k}}) = 0$. В этом случае группа Пикара $\operatorname{Pic}(V \otimes \overline{k})$ совпадает с группой Нерона–Севери

$$\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Pic}(V \otimes \overline{k}) / \operatorname{Pic}^0(V \otimes \overline{k}),$$

где $\operatorname{Pic}^0(V \otimes \overline{k})$ – многообразие Пикара. В дальнейшем мы предполагаем, что $\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k}) = \mathrm{NS}(V)$. Если для дивизоров на V верна гипотеза Тэйта (другими словами, если каноническое отображение

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \to H^2(V \otimes k^{\mathrm{s}}, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)}$$

является изоморфизмом для простого числа $l \neq p = \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$ [13,14], и l не делит $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V)]_{\mathrm{tors}})$, то мы доказали, что группа $\mathrm{Br}'(X)$ имеет конечную l-примарную компоненту.

При доказательстве основных результатов диссертации используются следующие леммы.

Лемма 1. *Предположим, что спектральная последовательность $E_2^{p,q}$ дает инъективный морфизм $E_2^{3,0} \to E^3$. Тогда имеется точная последовательность*

$$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \to E_1^2 \to E_2^{1,1} \to 0, \tag{3}$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \to E_2^{0,2}]$ [15].

Лемма 2. *Пусть V – гладкое проективное многообразие над полем $k = \mathbb{F}_q(C)$, l – простое число, отличное от $p = \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$. Тогда для любого целого числа i группа $H^i(V \otimes k^{\mathrm{s}}, \mu_l)$ конечна.*

---

[13] Tate J. Algebraic cycles and poles of zeta functions // Arithmetical Algebraic Geometry. N.Y.: Harper and Row. – 1965. – P. 93–110.

[14] Tate J. Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology // Proc. Symposia in Pure Math. – 1994. – V. 55. – Part 1. – P. 71–83.

[15] Танкеев С.Г. О группе Брауэра // Изв. РАН. Сер. матем. – 2000. – Т. 64. – №4. – С. 141–162.

Лемма 3. *Если выполнены условия леммы 2, то группа* $\mathrm{Br}'(V \otimes k^{\mathrm{s}})_l$ *конечна.*

Лемма 4. *Если выполнены условия леммы 2, то для любого простого числа* l*, отличного от* $p = \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$*,* l*-примарная компонента* $\mathrm{Br}'(V \otimes k^{\mathrm{s}})(l)$ *группы Брауэра* $\mathrm{Br}'(V \otimes k^{\mathrm{s}})$ *изоморфна (неканонически)* $(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^{\rho_0(V \otimes k^{\mathrm{s}}, l)} \oplus F$*, где* $\rho_0(V \otimes k^{\mathrm{s}}, l)$ *– целое число и* F *- конечная группа, зависящие, вообще говоря, от выбора простого числа* l *и многообразия* V*.*

Основными результатами исследования являются следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* V *– гладкое проективное многообразие над полем* k*. Предположим, что* $V(k) \neq \varnothing$*,* $H^1(V \otimes \overline{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \overline{k}}) = 0$*,* $\mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \overline{k})$*. Если для простого числа* $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes k^{\mathrm{s}}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)},$$

(другими словами, если верна гипотеза Тэйта для дивизоров на V*), то* l*-примарная компонента группы кручения* $[\mathrm{Br}'(V \otimes k^{\mathrm{s}})]^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)}$ *конечна.*

Теорема 2. *Пусть* $\pi : X \to C$ *– сюръективный морфизм гладких проективных многообразий над* $\mathbb{F}_q$*, общий схемный слой которого является гладким многообразием* V *над* k*, и все схемные слои морфизма* π *приведены. Предположим, что* $V(k) \neq \varnothing$*,* $H^1(V \otimes \overline{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \overline{k}}) = 0$*,* $\mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \overline{k})$*. Если для простого числа* l*, не делящего* $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V)]_{\mathrm{tors}})$ *и отличного от характеристики поля* $\mathbb{F}_q$*, верно соотношение*

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes k^{\mathrm{s}}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)}$$

(другими словами, если верна гипотеза Тэйта для дивизоров на V*), то* l*-примарная компонента группы* $\mathrm{Br}'(X)$ *конечна.*

Глава 3 содержит приложения к гипотезе Тэйта.

Следующие два предложения хорошо известны.

Предложение 1. *Пусть* X *– гладкое проективное многообразие над конечным полем* $\mathbb{F}_q$*. Если для простого числа* $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$ *верна гипотеза Тэйта о дивизориальных циклах:*

$$\mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l = H^2(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q,\ \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)},$$

то это соотношение верно для всех $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$[16].

[16]Milne J.S. Values of zeta functions of varieties over finite fields // Amer. J. Math. – 1986. – V. 108. – P. 297–360.

Предложение 2. *Пусть X – гладкое проективное многообразие над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Следующие утверждения эквивалентны* [17,18] :

(a) $\mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l = H^2(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q,\, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}$;
(b) $\mathrm{Br}'(X)(l)$ *конечна* ;
(c) $\mathbb{Z}_l \otimes \mathrm{Pic}\, X \to H^2(X_{et},\, \mathbb{Z}_l(1))$ *биективно* ;
(d) *порядок полюса дзета-функции Хассе – Вейля* $Z(X,t)$ *в точке* $t = q^{-1}$ *равен рангу* $\mathrm{Pic}\, X$.

Из этих предложений и теоремы 2 второй главы вытекает основная теорема главы 3:

Теорема 3. *Пусть $\pi : X \to C$ – сюръективный морфизм гладких проективных многообразий над $\mathbb{F}_q$, общий схемный слой которого является гладким многообразием V над k, и все схемные слои морфизма π приведены. Предположим, что $V(k) \neq \varnothing$, $H^1(V \otimes \overline{k}, \mathcal{O}_{V\otimes\overline{k}}) = 0$, $\mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \overline{k})$. Если для простого числа l, не делящего $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V)]_{\mathrm{tors}})$ и отличного от характеристики поля $\mathbb{F}_q$, верно соотношение*

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes k^{\mathrm{s}}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)}$$

(другими словами, если верна гипотеза Тэйта для дивизоров на V), то для любого простого числа $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$

$$\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(X \otimes \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}$$

(т. е. гипотеза Тэйта верна для дивизоров на X).

Предложение 3. *Если V – абелево многообразие над $k = \mathbb{F}_q(C)$, $p = \mathrm{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$, то каноническое отображение*

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \ \to \ H^2(V \otimes k^{\mathrm{s}}, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{s}}/k)}$$

биективно (т. е. является изоморфизмом)[19].

Заметим, что для абелева многообразия V

$$H^1(V \otimes \overline{k}, \mathcal{O}_{V\otimes\overline{k}}) \neq 0;$$

более того,

$$\dim_{\overline{k}} H^1(V \otimes \overline{k}, \mathcal{O}_{V\otimes\overline{k}}) = 2 \cdot \dim_k V.$$

[17] Tate J. Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology // Proc. Symposia in Pure Math. – 1994. – V. 55. – Part 1. – P. 71–83.

[18] Зархин Ю.Г. Абелевы многообразия в характеристике p // Математические заметки. – 1976. – Т. 19. – № 3. – С. 393–400.

[19] Зархин Ю.Г. Абелевы многообразия в характеристике p // Математические заметки. – 1976. – Т. 19. – № 3. – С. 393–400.

Пусть V – абелева поверхность над k (двумерное абелево многообразие), т. е. проективная поверхность, на которой определена операция сложения

$$\begin{gathered} V \times V \to V \\ (x, y) \to x + y, \end{gathered}$$

причем отображение $V \times V \to V$ является морфизмом алгебраических многообразий и есть операция обращения:

$$\begin{gathered} V \xrightarrow{j} V \\ x \mapsto (-1)x = -x. \end{gathered}$$

На V определим отношение эквивалентности: $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$.

При этом:

(1) $x \sim x$, потому что $x = \pm x$
(2) если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$, потому что
$x = \pm y,\ y = \pm z \Rightarrow x = \pm z$.

Пусть $\varphi : V \to V/\sim$ – каноническое отображение.

Многообразие $V/\sim$ имеет 16 особых точек (потому что $p \neq 2$), каждая из которых – обыкновенная невырожденная двойная точка.

Рассмотрим минимальное разрешение особенностей

$$\sigma : \mathrm{Km}(V) \to V/\sim$$

(вне множества особых точек σ – изоморфизм).

Поверхность $\mathrm{Km}(V)$ не имеет особых точек и называется *поверхностью Куммера.* Имеется коммутативная диаграмма рациональных отображений

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma^{-1}\circ\varphi"'] & V/\sim \\ & \mathrm{Km}(V), \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

где φ, σ – морфизмы.

Если мы раздуем точки неопределенности рационального отображения $\sigma^{-1} \circ \varphi$, то мы получим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widetilde{V} \arrow[dr, "\Phi"'] & & \\ & V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma^{-1}\circ\varphi"'] & V/\sim \\ & & \mathrm{Km}(V), \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

где $\Phi : \widetilde{V} \to V$ – последовательность раздутий с гладкими центрами, $\sigma^{-1} \circ \varphi \circ \Phi$ – сюръективный морфизм $\widetilde{V} \to \mathrm{Km}(V)$.

Для $\widetilde{V}$ верна гипотеза Тейта, потому что она верна для V в силу предложения 3, а $\widetilde{V}$ получается из V вклеиванием кривых, изоморфных $\mathbb{P}^1$ над полем $\overline{k}$. Поэтому гипотеза Тэйта верна для $\mathrm{Km}(V)$ (это хорошо известный факт, следующий из сюръективности отображения $\widetilde{V} \to \mathrm{Km}(V)$).

Кроме того, хорошо известно, что

$$\begin{aligned}
&H^1(\mathrm{Km}(V) \otimes \overline{k}, \mathcal{O}_{\mathrm{Km}(V)\otimes\overline{k}}) = 0,\\
&\mathrm{Km}(V)(k) \neq \varnothing,\\
&\mathrm{NS}(\mathrm{Km}(V))_{\mathrm{tors}} = 0.
\end{aligned}$$

В результате мы получаем следующую теорему:

Теорема 4. *Пусть $\pi : X \to C$ – сюръективный морфизм гладких проективных многообразий над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $p \neq 2$, общий слой которого является поверхностью Куммера $V = \mathrm{Km}(A)$ для некоторой абелевой поверхности A над полем k, а все схемные слои морфизма π приведены. Предположим, что $\mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \overline{k})$. Тогда для всех $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$ группа $\mathrm{Br}'(X)(l)$ конечна и для X верна гипотеза Тэйта:*

$$\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} H^2(X_{et}, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}.$$

В заключение, автор выражает глубокую и искреннюю благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Сергею Геннадьевичу Танкееву за постановку задачи, внимание, советы и замечания на протяжении всей работы.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Доказательство конечности l-примарной компоненты группы Брауэра арифметической модели гладкого регулярного многообразия над глобальным полем конечной характеристики при условии, что для этого многообразия верна гипотеза Тэйта для дивизоров.

2. Доказательство теоремы о взаимоотношении гипотезы Тэйта для дивизоров на общем регулярном слое и на объемлющем многообразии над конечным полем.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях,включенных в перечень ВАК

[1] Засорина, Т.В.[20] *О группе Брауэра алгебраического многообразия над конечным полем* / Т.В. Засорина // Изв. РАН. Сер. матем. – 2005. – Т. 69 – № 2. – С. 111–124.

Другие публикации

[2] Засорина, Т.В. *О некоторых свойствах группы Брауэра алгебраического многообразия над глобальным полем конечной характеристики* / Т.В. Засорина // Математические методы, информационные технологии и физический эксперимент в науке и производстве. Материалы научно-технической конференции факультета информатики и прикладной математики. – Владимир: РИО ВлГУ, 2003. – С. 20.

[3] Прохорова, Т. В. *О группе Брауэра* / Т.В. Прохорова // Международная конференция по математической теории управления и механике, Суздаль, 22-27 июня 2007: тез. докл. – Владимир: РИО ВлГУ, 2007. – С. 50–52.

[20] Прохорова Т.В. (фамилия изменена в связи с регистрацией брака)

Подписано в печать 19.12.08.
Формат 60×84/16. Усл.печ.л. 0,93. Тираж 100 экз.
Заказ 313-08 г.
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87