На правах рукописи

Махов Сергей Анатольевич

БАЗОВЫЕ МОДЕЛИ МИРОВОЙ ДИНАМИКИ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2008

Работа выполнена в ордена Ленина Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Малинецкий Георгий Геннадьевич

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор Малков Сергей Юрьевич

кандидат физико-математических наук, доцент Степанцов Михаил Евгеньевич

Ведущая организация: Институт системного анализа РАН

Защита диссертации состоится 19 декабря 2008 г. в 17 часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан 18 ноября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В настоящее время широко обсуждается круг проблем, связанных с глобализацией. Как следствие, вырос интерес к научным методам прогноза глобального развития, в том числе математическим моделям мировой динамики. Впервые такие модели появились в 70-х годах XX века и сразу привлекли к себе общественное внимание. Среди этих моделей наиболее значима первая по времени появления модель Дж. Форрестера, служащая отправной точкой для дальнейших исследований.

Одна из актуальных проблем современности – проблема устойчивого развития[1]. Во-первых, не очень ясно само понятие, изначально носящее описательный и расплывчатый характер[2]. Во-вторых, остается открытым вопрос о его достижимости вообще. Поэтому необходимы модели, позволяющие уточнить и формализовать понятие устойчивого развития, а также выяснить условия его осуществимости.

Ряд таких моделей уже построено, например, модели В.М. и К.В. Матросовых[3], представляющие собой модификации ресурсных моделей Дж. Форрестера и Д. Медоуза, экологическая модель В.Г. Горшкова[4], индексно-рентная модель А.П. Федотова[5]. Эти и подобные им модели отталкиваются в своих построениях от сложившейся современной ситуации, в них делается акцент на устойчивости, а не на развитии. Поэтому в данных моделях устойчивое развитие толкуется как гомеостаз, сохранение текущей ситуации.

Существует иной подход, основанный на выяснении основных атрибутов деятельности человечества и выделении параметров порядка. На основании этого создается динамическая модель, в которой акцент делается на развитии. Было выдвинуто предположение, что одним из главных таких атрибутов является создание искусственной среды – техносферы. Именно за счет создания технологий человечество живет и развивается. При таком подходе в качестве одного из параметров порядка следует выбирать уровень технологий и строить модель, исходя из этого. К таким моделям следует отнести модели М. Кремера[6], А.В. Подлазова[7], А.С. Малкова[8]. Эти модели строились для

---

[1] Перевод термина "sustainable development" (буквально: согласованное, самоподдерживающее развитие).

[2] Устойчивое развитие – такая модель развития, при которой достигается удовлетворение жизненных потребностей нынешнего поколения людей без уменьшения такой возможности для будущих поколений (*Г.Х. Брундтланд* "Наше общее будущее" – 1987).

[3] Новая парадигма развития России (Комплексные исследования проблем устойчивого развития). – М.: Academia, МГУК. – 1999.

[4] *Горшков В.Г.* Физические и биологические основы устойчивости жизни. – М.: ВИНИТИ – 1995.

[5] *Федотов А.П.* Глобалистика: начала науки о современном мире. – М.: Аспект Пресс. – 2002.

[6] *Kremer M.* Population growth and technological change: one million B.C. to 1990 // The Quarterly Journal .of Economics. – 1993. – №108. – P. 681-716.

[7] *Подлазов А.В.* Основное уравнение теоретической демографии и модель глобального демографического перехода // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2001. – №88. – 16 с.

[8] *Малков А.С., Коротаев А.В., Халтурина Д.А.* Математическая модель роста населения Земли, экономики, технологии и образования // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2005. – №13. – 39 с.

объяснения глобальной демографической динамики, в частности, гиперболического закона роста численности населения Земли и последующего демографического перехода.

Еще одна проблема, стоящая перед моделированием глобальных процессов – объяснение единства мира. Формально человечество разделено на нации, государства, однако по ряду показателей (демографические, экономические) ведет себя как единое целое. В большинстве моделей глобального развития это единство просто постулируется, но не объясняется. Одно из возможных объяснений принадлежит С.П. Капице[9], который выдвинул гипотезу о роли информационного взаимодействия между людьми. Однако природа этого взаимодействия не была им уточнена. Более конкретное объяснение было дано А.В. Подлазовым[10], предложившего концепцию технологического взаимодействия. Согласно этой концепции технологии распространяются локально от одного общества (коллектива) к другому за счет переноса (копирования). И именно однотипные технологии, применяемые в разных частях мира и в разных обществах, позволяют рассматривать человечество как единую систему. Концепция копирования технологий позволяет объяснить единство мира феноменологически, однако не раскрывает механизма копирования, за счет чего происходит. В связи с этим построение модели, объясняющей механизм распространения технологий, представляется актуальным.

Цели работы

1. Формализация понятия устойчивого развития.
2. Построение базовой модели мировой динамики с целью выяснения основных факторов глобального развития.
3. Построение модели взаимодействия обществ с целью выяснения механизма распространения технологий, создающего единство мира.

Методы исследования

Основным методом исследования является построение динамических моделей и исследование их методами нелинейной динамики, качественной теории дифференциальных уравнений и численными методами.

Научная новизна

В работе формализовано понятие устойчивого развития. Модифицирована модель мировой динамики Форрестера, для нее исследованы стационарные решения.

Построена новая феноменологическая модель глобального развития, описывающая мировую динамику индустриального общества и переход к постиндустриальному обществу.

---

[9] *Капица С.П.* Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. – М.: Наука. – 1999. – 240 с.

[10] *Подлазов А.В.* Теоретическая демография как основа математической истории // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2000, №73. – 36 с.

Построена новая феноменологическая модель взаимодействия регионов, объясняющая с общих позиций единство глобальной мировой системы.

Положения, выносимые на защиту

1. Результаты исследования модифицированной модели мировой динамики Дж. Форрестера. В рамках модифицированной модели исследован вопрос об условиях достижения устойчивого развития.
2. Результаты исследования ресурсно-технологической модели мировой динамики. Выявление и классификация режимов глобального развития.
3. Определение устойчивого развития и исследование условий его достижимости в рамках построенной ресурсно-технологической модели мировой динамики.
4. Результаты исследования модели взаимодействия игроков. В рамках модели предложен механизм, объясняющий распространение технологий через обмены. Выявлен эффект синхронизации развития игроков, происходящего в условиях обменов.

Практическая значимость

Полученные результаты используются в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Институте системного анализа РАН, могут использоваться в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН, Центральном экономико-математическом институте РАН, Институте народно-хозяйственного прогнозирования РАН, Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Российском государственном гуманитарном университете, Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова, Институте экономики РАН, Институте всеобщей истории РАН, Институте социально-политических исследований РАН.

Построенные модели могут быть использованы для анализа возможных путей развития мира и принятия необходимых мер для осуществления устойчивого развития и при исследовании конкурентной борьбы или технологической гонки обществ. Также модели могут быть использованы как основа для построения более детальных и развернутых моделей мировой динамики.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на международной конференции "Проблемы управления безопасностью сложных систем" (ИПУ РАН, 2002, 2003, 2004, 2005), на методологическом семинаре "Глобализация: синергетический подход" (РАГС, 2002), V международном конгрессе математического моделирования (Дубна, 2002), XLVI научной конференции МФТИ (ГУ) "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук" (МФТИ, 2003), на международной научно-практической конференции "Стратегии динамического развития России: единство самоорганизации и управления" (2004), международной конференции "Системный анализ и информационные технологии" (Переславль, 2005), международной междисциплинарной научной конференции "Идеи синергетики в естественных науках" (Тверь, 2006), международной конференции "Математическое моделирование исторических процессов" (ИПМ РАН, 2007).

Публикации

По результатам выполненной работы имеется 21 публикация (см. список публикаций): 9 статей, 1 из которых в журнале, входящем в перечень ВАК РФ, 10 тезисов докладов и 2 препринта.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 62 наименования. Диссертация содержит 41 рисунок. Общий объем диссертации составляет 85 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждаются методы математического моделирования мировой динамики. Дается краткий обзор основных моделей глобального развития.

В **первой главе** рассматривается модификация классической модели Дж. Форрестера "Мир-2". На основе модифицированной модели исследуется вопрос об устойчивом развитии моделируемой мировой системы.

Модель Дж. Форрестера построена на основании принципов системной динамики – метода изучения сложных систем с нелинейными обратными связями, разработанный Дж. Форрестером в конце 50-х годов XX века. Аналитические основы построения модели, предназначенной для имитации мировых процессов, были рассмотрены в его работах, посвященных изучению промышленных и урбанизированных систем[11].

Мировая система в модели "Мир-2" описывается пятью основными переменными: численность населения P, капитал K, доля капитала в сельском хозяйстве X, загрязнение Z и запасы невосстановимых природных ресурсов R. Также используются вспомогательные переменные, из которых наиболее важны материальный уровень C жизни и уровень питания F. Динамика основных переменных описывается системой дифференциальных уравнений, которая в упрощенном виде выглядит так:

$$\frac{dP}{dt} = P(B - D), \qquad (1)$$

$$\frac{dK}{dt} = K_+ - \frac{K}{T_K}, \qquad (2)$$

[11] *Форрестер Дж.* Основы кибернетики предприятия. – М.: Прогресс, 1971.

$$\frac{dX}{dt} = X_+ - \frac{X}{T_X}, \tag{3}$$

$$\frac{dZ}{dt} = Z_+ - \frac{Z}{T_Z}, \tag{4}$$

$$\frac{dR}{dt} = -R_-, \tag{5}$$

где $B(P, C, F, Z)$ – темп рождаемости, $D(P, C, F, Z)$ – темп смертности, $K_+ = K_+(P, C)$ – скорость производства основных фондов, $T_K = 40$ лет – характерное время износа основных фондов, $X_+ = X_+(F, C)$ – прирост доли сельскохозяйственных фондов, $T_X = 15$ лет – время выбытия доли сельскохозяйственных фондов, $Z_+ = Z_+(P, K)$ – скорость генерации загрязнения, $T_Z = T_Z(Z)$ – характерное время естественного разложения загрязнения, $R_- = R_-(P, C)$ – скорость потребления ресурсов, F – уровень питания, C – материальный уровень жизни.

Компьютерный анализ данной системы показал, что при сохранении тенденций развития глобальной системы, имевших место в начале 70-х годов, рост населения P, капитала K, материального обеспечения приведет к истощению невосстановимых ресурсов, чрезмерному загрязнению Земли и сменится быстрым падением численности населения и упадком производства (рис. 1, 2).

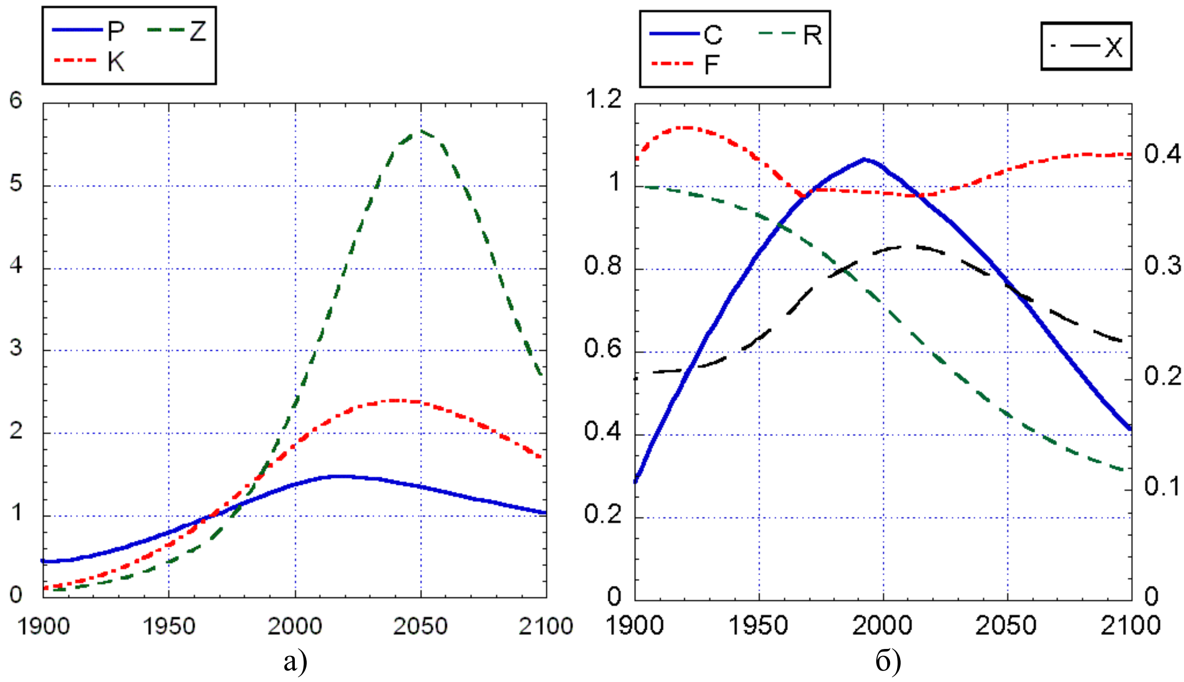
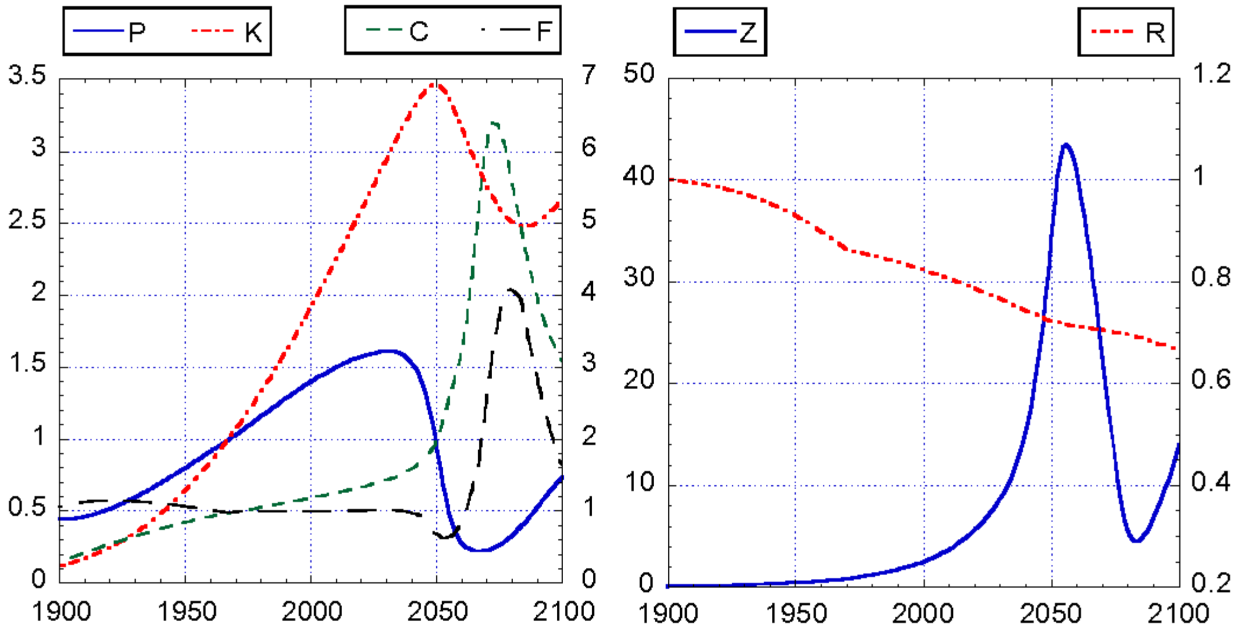


Рис. 1. Модель Форрестера в первоначальном виде: кризис ввиду истощения ресурсов. Сначала падает материальный уровень жизни, потом численность населения и капитал. Кризис наступает примерно к 2020-30 г.г. Все величины представлены в условных единицах. На рисунке б) графики представлены в двух масштабах: один показан слева от графика, второй – справа. Т.е., такие переменные, как уровень питания F, уровень жизни C и количество ресурсов R меняются от 0 до 1.2, а доля фондов в сельском хозяйстве – от 0 до 0.45.



а) б)

Рис. 2. Результаты модели Форрестера в предположении о снижении в 1970 году скорости потребления ресурсов в 4 раза, что могло быть вызвано, к примеру, экономией. Это вызывает кризис загрязнений. Население резко уменьшается в несколько раз, также быстро падают фонды, рост уровня питания и уровня жизни просто означает, что оставшийся капитал используется остальной частью населения (такое может быть справедливо в предположении, что все "вредные" производства находятся в густонаселенных странах, а население, активно использующее капитал, проживает в слабо населенных странах).

В качестве альтернативы такому упадку Дж. Форрестер предлагал перейти к глобальному равновесию, которое понималось им как выход переменных модели на стационарные значения, однако в рамках модели таких решений нет. Чтобы появились стационарные решения, необходимо модифицировать модель.

Одна такая модификация была осуществлена в работах коллектива исследователей под руководством В.А. Егорова, проведенных в ИПМ АН СССР в 1970-х годах. В своих исследованиях они занимались вопросом введения управляющих воздействий в модель "Мир-2" с целью предотвращения глобального кризиса. Для этого предлагалось воздействовать на систему путем распределения капиталовложений в предположении, что:

1) разработаны и внедрены в промышленность технологии утилизации и восстановления ресурсов;

2) создана промышленная отрасль по искусственной очистке загрязнения;

3) возможно изменять инвестиции в сельскохозяйственные фонды.

Тогда можно направлять капитал во вновь созданные отрасли и на изменение доли фондов в сельском хозяйстве. Соответственно, меняются уравнения (3), (4), (5):

$$\frac{dX}{dt} = (1 + U_X)X_+ - \frac{X}{T_X}, \tag{6}$$

$$\frac{dZ}{dt} = Z_+ - \frac{Z}{T_Z} - \frac{K}{c_Z} U_Z, \tag{7}$$

$$\frac{dR}{dt} = -R_- + \frac{K}{c_R} U_R. \tag{8}$$

Здесь U_X – управляющее воздействие на инвестиции в сельское хозяйство, U_Z – доля капитала K, направляемая на борьбу с загрязнением, c_Z – стоимость очистки единицы загрязнения, U_R – доля капитала K, идущая на восстановление ресурсов, c_R – стоимость восстановления единицы ресурса. Кроме того, материальный уровень жизни вычисляется по новой формуле, учитывающей введенное распределение капитала. Указанные величины U_R, U_Z, U_X представляют собой функции времени и, будучи определены, задают некоторый сценарий развития системы (1), (2), (6)–(8). Было показано, что существует сценарий $U_R(t)$, $U_Z(t)$, $U_X(t)$, при котором в модели не будет кризиса до 2100 г.

В ходе проведенного исследования было выяснено, что основные проблемы в модели Дж. Форрестера – исчерпание ресурсов и рост загрязнений – могут быть решены без модификации сельского хозяйства. Поэтому в настоящей работе она не проводилась. Таким образом, уравнение (3) остается в силе, а уравнения (4), (5) заменяются на (7), (8).

Поскольку U_R, U_Z по своему смыслу аналогичны X, считалось, что для них справедливы схожие с (3) уравнения, отражая тот факт, что фонды не создаются и не исчезают мгновенно:

$$\frac{dU_R}{dt} = \frac{G_R - U_R}{T_{UR}}, \tag{9}$$

$$\frac{dU_Z}{dt} = \frac{G_Z - U_Z}{T_{UZ}}, \tag{10}$$

где G_R, G_Z – инвестиции (с точностью до множителей T_{UR}, T_{UZ}) в соответствующие отрасли индустрии по восстановлению ресурсов и очистке загрязнений, T_{UR}, T_{UZ} – время выбытия части фондов в данных отраслях. Они считались константами одного порядка с T_X, т.е. 10-15 лет. Предполагалось, что новые отрасли не созданы до 2010 г., т.е. при $t < t_{in} = 2010$ $G_R = 0$, $G_Z = 0$. Иными словами, управление происходит не непосредственно долями капитала, а через инвестиции в них.

Определенная таким образом модель применялась к исследованию вопроса об *устойчивом развитии* мировой системы. Понятие устойчивого развития было впервые озвучено в 1986 г. и с тех пор под ним стали понимать такую модель развития, при которой достигается удовлетворение жизненных потребностей нынешнего поколения людей без уменьшения такой возможности для будущих поколений. В рамках математической модели появляется возможность формализовать данное определение и трактовать устойчивое развитие моделируемой системы как *асимптотическое стационарное решение* динамических уравнений (1)–(3), (7)–(10), удовлетворяющее определенным "желательным" условиям, каковые являются мерой *качества* достигнутого решения. Эти условия формулировались в виде: $Z \leq Z_{max}$; $R \geq R_{min}$; $C \geq C_{min}$; $F \geq F_{min}$, где Z_{max} – максимально допустимый уровень загрязнения, а R_{min}, C_{min}, F_{min} – минимально допустимые значения запасов ресурсов, материального уровня жизни и уровня питания соответственно.

Таким образом, возникает задача исследования стационарных решений модифицированной модели (1)–(3), (7)–(10) и указание вид функциональной зависимости управлений $G_R(R)$ и $G_Z(Z)$, гарантирующих "хорошие" стационары модифицированной системы, то есть такие, которые дают устойчивое развитие.

При исследовании положений равновесия системы (1)–(3), (7)–(10) уравнения (9), (10) можно исключить, поскольку при этом $U_R = G_R$, $U_Z = G_Z$, и искать положения равновесия в зависимости от параметров c_R, c_Z, U_R, U_Z. Как оказалось, если при каких-то параметрах существует положение равновесия, то это положение равновесия единственное и, более того, устойчивое, поскольку все собственные значения линеаризованной вблизи положения равновесия системы (1)–(3), (7), (8) либо отрицательны, либо обладают отрицательными вещественными частями. На рис. 3 показана область существования стационаров в пространстве параметров (U_R, U_Z) при $c_R = 0.3$, $c_Z = 0.4$.

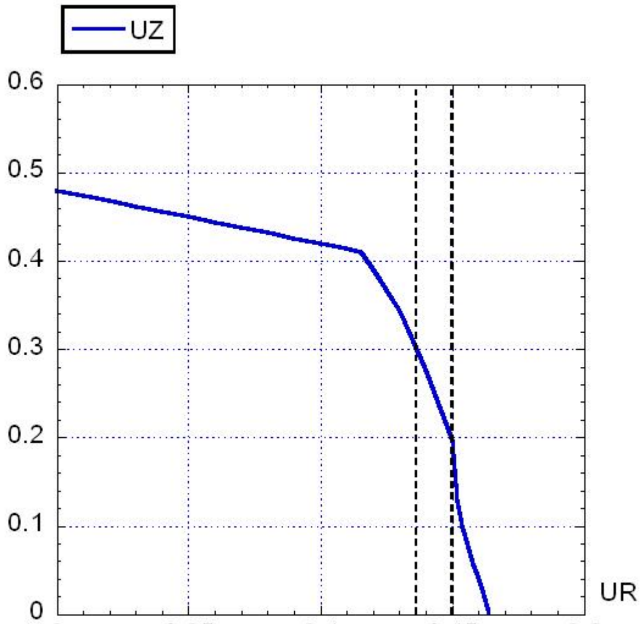
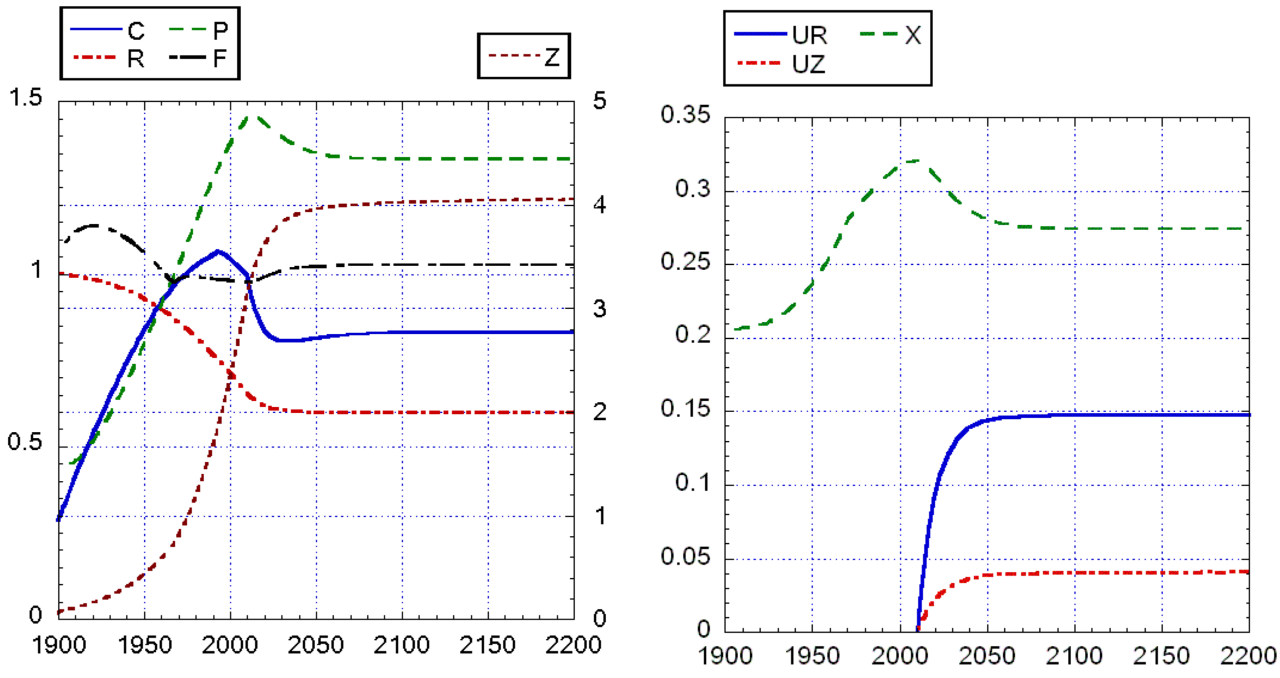


Рис. 3. Область допустимых значений долей фондов в новых отраслях (U_R, U_Z) при $c_R = 0.3$, $c_Z = 0.4$, в которой существуют стационарные решения системы (1)–(3), (7), (8). Сплошная линия соответствует границе области допустимых значений, на ней стационары перестают существовать. На левой части границы (от $U_R = 0$ до $U_R = 0.115$) $Z = 0$, на правой (от $U_R = 0.115$ до $U_R = 0.164$) $R = 1$ (в условных единицах по отношению к изначальным запасам ресурсов R_0). Левый пунктир ($U_R = 0.136$) соответствует $C = C_{min} = 0.5$, правый ($U_R = 0.15$) – $Z = Z_{max} = 10$ (точнее говоря, при $U_R > 0.15$ $Z > 10$, но само значение $U_R = 0.15$ области принадлежит). Таким образом, допустимые решения находятся в области, ограниченной двумя пунктирами, осями $U_R = 0$, $U_Z = 0$ и сплошной кривой $U_Z(U_R)$.

Были построены аналогичные картины при других значениях параметров c_R, c_Z. Было установлено, что при увеличении (уменьшении) c_R (и фиксированном c_Z) правая граница области сдвигается вправо (влево), при уменьшении c_Z (и фиксированном c_R) верхняя граница области опускается, при увеличении – поднимается до определенного уровня и не меняется.

При исследовании оказалось, что в качестве $G_R(R)$ может быть взята показательная функция вида $G_R(R) = \alpha + \beta \cdot \exp(-R/R_0)$, при этом $\alpha \approx (0.45 \pm 0.05)c_R$, $\beta \approx (0.05 \pm 0.05)c_R$. Аналогично, $G_Z(Z)$ может быть взята линейная функция: $G_Z(Z) = \gamma Z$.

Интегрирование динамической системы велось с 1900 по 2200 г. Считалось, что восстановление ресурсов не заходит столь далеко, что дает их больше, чем природа, т.е. выполнено $\frac{dR}{dt} \le 0$, и, следовательно, $R(t) < R(t_{in})$ при $t > t_{in} = 2010$, что учитывалось при настройке параметров α, β, γ. Расчеты показали, что модель действительно допускает "хорошие" стационарные решения (рис. 4), при этом выход на устойчивое развитие успевает произойти до 2150г.



а) б)

Рис. 4. Результаты интегрирования модифицированной модели Форрестера при $c_R = 0.3$, $c_Z = 0.4$: а) основные характеристики, б) доли фондов в новых отраслях и с/х. Начало функционирования новых отраслей 2010 г. Время запаздывания $T_{UR} = T_{UZ} = 10$ лет. Параметры: α=0.135, β=0.018, γ=0.04. На рисунке а) графики представлены в двух масштабах: один показан слева от картинки, второй – справа.

Эти результаты были получены при $c_R = 0.3$, $c_Z = 0.4$. Было проведено исследование и при других коэффициентах. Выяснилось, что более существенное влияние оказывает подорожание восстановления ресурсов, чем очистки загрязнения. Также выяснилось, что стационары существуют не при всех значениях данных параметров, поскольку есть ограничение сверху, налагаемое коэффициентом c_R: при $c_R > 0.7$ стационарных режимов со сформулированными желательными требованиями нет. Коэффициент c_Z слабо влияет на качество стационаров.

Анализ рис. 3 приводит к выводу о том, что существуют "хорошие" стационарные решения при $G_Z = 0$, т.е. в отсутствие очистки загрязнений. Этот эффект выполнен не всегда, так, при очень малых значениях коэффициента c_R (меньше 0.04) без очистки загрязнений "хороших" стационаров нет.

Также было исследовано влияние времени начала восстановления ресурсов и очистки загрязнений t_{in}, оказалось, что при увеличении t_{in} Z^* растет, а R^* убывает, что и понятно, поскольку мы условились считать $R^* < R(t_{in})$. Следовательно, должен существовать "критический" момент t'_{in}, после которого "хорошие" стационары получить невозможно, оставаясь в рамках предположений модели.

Во **второй главе** излагается феноменологическая модель мировой динамики, в рамках которой исследуется проблема принципиальной достижимости устойчивого развития мировой системы.

На глобальном уровне, оперирующим временами порядка столетий и тысячелетий параметрами порядка можно считать *численность населения*, доступные человечеству *ресурсы* и имеющиеся *технологии*. Ресурсы – это все виды известных материальных ресурсов, как возобновляемых, так и невозобновляемых. Технологии – это знания и умения, с помощью которых люди поддерживают собственное существование.

Взаимодействие между тремя указанными величинами такое: население создает технологии, технологии позволяют выделить и добыть ресурсы из окружающей среды, ресурсы повышают обобщенную продуктивность социально-экономической системы, что ведет к росту населения. Заметим, что изложенная схема асимметрична: технологии играют роль ведущей, а численность населения – ведомой переменной, ресурсы выступают в качестве передатчика. То есть изменение одного только уровня технологий вызывает соответствующее изменение и других параметров, в то время как, скажем, уменьшение ресурсов может привести к разным вариантам – либо падение уровня технологий и численности населения, либо возврат на прежний уровень за счет открытия новых ресурсов. Известно, что в прошлом численность населения подстраивалась под уровень развития технологий и имеющихся ресурсов, поэтому представляется вполне допустимым при рассмотрении вопроса обеспеченности ресурсами отказаться от переменной "население" и иметь дело только технологиями T и ресурсами R, считая, что $N \sim T$.

При составлении уравнений учитывалась вся схема, в которой все три величины ведут себя согласованно, и в силу этого в среднем должны изменяться по одному закону. Известны данные о росте населения Земли: в течение, по крайней мере, двух последних тысячелетий численность населения росла по гиперболическому закону, то есть для этой переменной наблюдается *масштабная инвариантность* и отсутствие характерных значений. Поэтому и для двух других переменных должно быть то же самое (поскольку все три переменные согласованы). Это означает, что при написании динамических уравнений все зависимости потоков основных переменных от них самих должны носить степенной (масштабно-инвариантный) характер, т.е. иметь вид R^xT^y. Каждое такое произведение в правой части соответствующего дифференциального уравнения описывает действие какого-то одного фактора. Факторы полагаются независимыми, поэтому если их несколько, они складываются или вычитаются.

Учитывались следующие факторы: 1) добыча ресурсов $D = \kappa T^b$, 2) восстановление и открытие новых ресурсов $P = \nu R^g T^h$, 3) ресурсосбережение $C = \gamma T^r$, 4) создание новых технологий $T_+ = \sigma R^c T^d$, 5) выбытие технологий $T_- = \mu T$.

Система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{D}{C} + P = -\lambda T^{b-r} + \nu R^g T^h, \tag{11}$$

$$\frac{dT}{dt} = T_+ - T_- = \sigma R^c T^d - \mu T. \tag{12}$$

Помимо основных переменных были введены валовой мировой продукт (ВМП), получаемый из добытых ресурсов $V = R^a T^b$, а также уровень жизни L, который, с точностью до постоянного множителя, определяется как продукт, приходящийся на душу населения или, что то же, отнесенный к уровню технологий, поскольку $N \sim T$: $L = V/N = R^a T^{b-1}$ (здесь показатель $a < 1$). Уровень жизни нужен, чтобы формализовать понятие устойчивого развития.

Определение. Будем говорить, что развитие моделируемой системы устойчивое, если в ходе ее эволюции при $t \to \infty$ уровень жизни не убывает.

Иначе говоря, устойчивое развитие – это такой асимптотический режим развития системы (12), (13), в котором $\frac{dL}{dt} \geq 0$.

Система (11), (12) задает модель в общем виде. Наряду с этим также рассматривались частные случаи: а) отсутствие ресурсосбережения при $r = 0$, б) отсутствие притока ресурсов в систему при $\nu = 0$.

Был проведен качественный анализ системы (11), (12) для случаев а) и б) отдельно. В отсутствие ресурсосбережения и наличия притока ресурсов в систему наряду с тривиальным аттрактором ($T^* = 0$, $R^* = 0$) имеется нетривиальное положение равновесия. Возможные типы при $d < 1$ показаны на рис. 5.

В случае седла и неустойчивых узла или фокуса в зависимости от начальных данных будет либо падение в ноль, либо неограниченный рост обеих переменных (рис. 6).

Первый вариант отражает ситуацию, когда потребление ресурсов превышает их открытие и восстановление. Это приводит к их полному исчерпанию, которое влечет за собой технологический упадок и падение уровня жизни. Такое развитие, очевидно, не является устойчивым.

Неограниченное решение содержательно означает либо отодвигание проблемы ресурсов в неопределенное будущее, например, за счет космической экспансии, либо выход за рамки модели.

В случае устойчивого узла или фокуса имеет место выход на константу. В зависимости от начальных данных такой выход будет более или менее плавным с возможным падением уровня жизни (рис. 7).

В случае центра имеют место колебания вокруг положения равновесия.

В случае, когда параметры g, h удовлетворяют соотношению $c(b\text{-}h) = g(1\text{-}d)$ имеет место экспоненциальное решение. Здесь так же неустойчивость, как в случае седла или неустойчивого узла и фокуса.

Формально под определение устойчивого развития подпадают и случай неограниченного роста, и случай выхода на стационар.

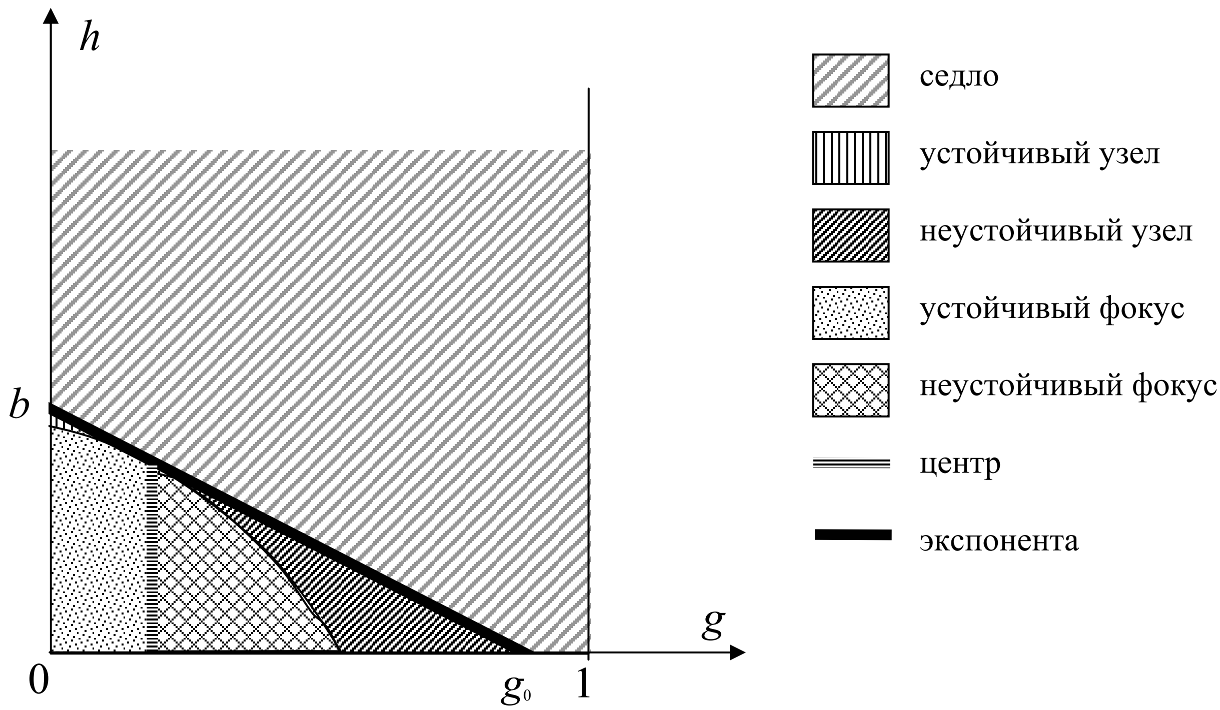
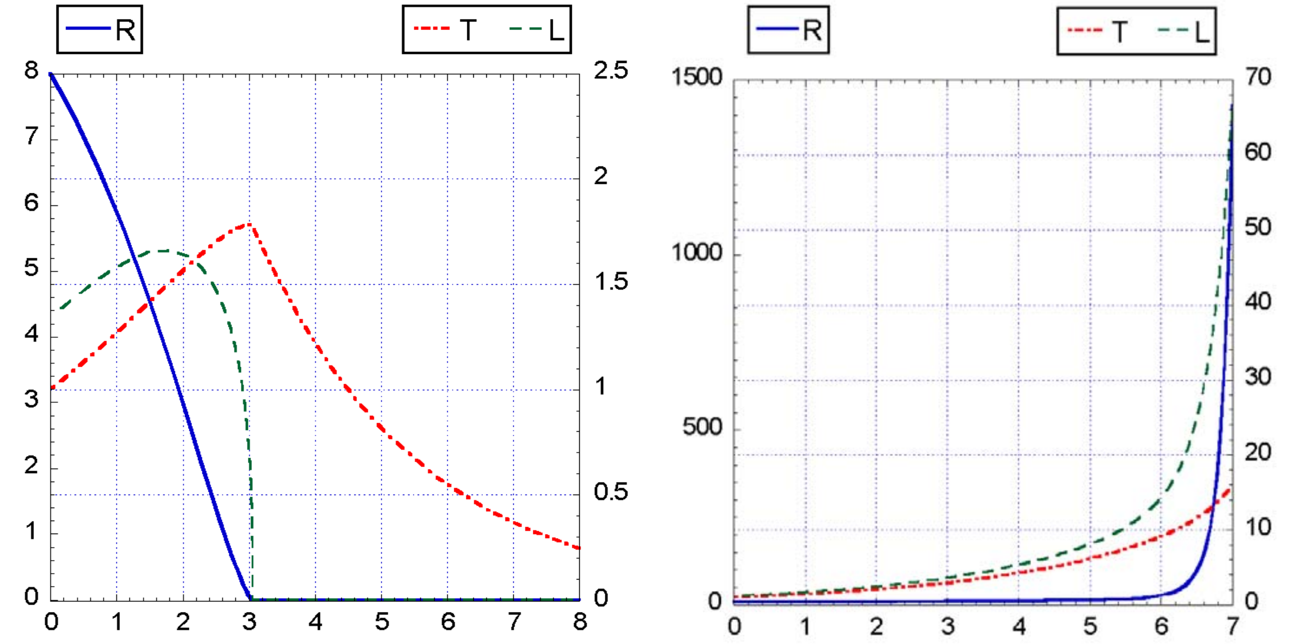


Рис. 5. Типы положения равновесия в зависимости от значений параметров g, h при $d < 1$, $g_0 = cb/(1\text{-}d)$.

При $d \geq 1$ устойчивые типы (узел и фокус) исчезают, остаются только неустойчивые. Согласно имеющимся за последние 100 лет данным значение параметра d именно таково. Соответственно, для того, чтобы имело место стационарное решение, необходимо менять закон развития мировой системы: нужно замедлить рост производящих технологий. Достигнуто это может быть лишь за счет коренной смены внутренней структуры системы не только в производстве, но и в идеологии.



а) б)

Рис. 6. Результаты расчетов в случае седла, неустойчивого узла или фокуса. Показана динамика основных переменных: R – ресурсы, T – уровень технологий, L – уровень жизни. По оси абсцисс – условное время. Переменные показаны в двух масштабах: шкала для ресурсов слева от самого графика, шкала для технологий и уровня жизни справа.

На рисунке 6а выход на нулевой аттрактор. После роста сначала падает уровень жизни, а вслед за ним и уровень технологий. После исчерпания ресурсов технологии по экспоненте убывают до нуля. На рис. 6б неограниченный рост технологий и ресурсов приводит к неограниченному росту уровня жизни.

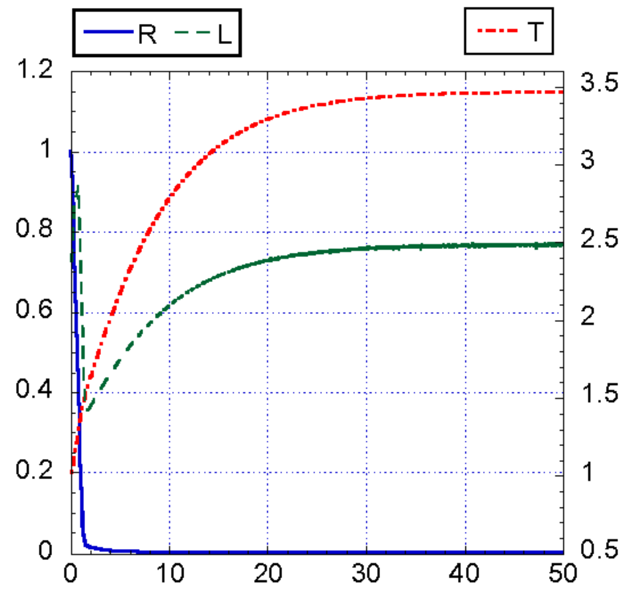


Рис. 7. Результаты расчетов в случае устойчивого узла. После некоторого довольно резкого падения уровень жизни медленно растет вслед за технологиями, выходя на константу. Ресурсы сначала резко падают, затем поддерживаются на низком, но ненулевом уровне.

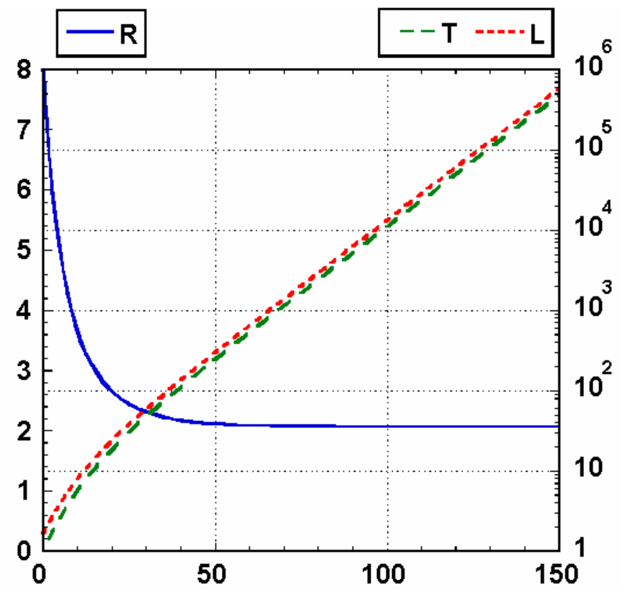


Рис. 8. Результаты по модели ресурсосбережения (4), (6), (7'), $d = 1$, $b = 2$, $r = 4$. Уровень технологий и уровень жизни показаны в логарифмическом масштабе.

В случае отсутствия восстановления и открытия новых ресурсов, т.е. отсутствия притока ресурсов, при $b > r$ качественное поведение аналогично случаю рис. 6а: происходит исчерпание ресурсов и падение всех характеристик до нуля. При $r > b$ был обнаружен режим, когда ресурсы выходят на константу, а технологии развиваются неограниченно (рис. 8).

При этом уровень жизни тоже возрастает неограниченно, что, согласно определению и означает устойчивое развитие. Заметим также, что тип этого устойчивого развития отличается от рассмотренных выше, он представляет собой "полубесконечный" аттрактор: по одной переменной имеет место выход на стационар, по другой – на бесконечность. Подобный сценарий развития возможен при особом режиме ресурсосбережения, чтобы с ростом *всех* технологий добыча ресурсов падала, а ВМП при этом рос.

Третья глава посвящена моделированию региональных субъектов (государств, региональных объединений, миров-экономик, цивилизаций) и взаимодействию между ними. Излагается и исследуется базовая модель таких субъектов.

Сначала рассматривается случай автаркии. Состояние субъекта описывается двумя переменными: уровень развития технологий T (интенсивный фактор развития) и сила E (экстенсивный фактор развития). Субъект производит продукт V (ВВП), определяемый по формуле: $V = \kappa T E^s$, где κ, s – параметры. Произведенный продукт расходуется по двум направлениям: наращивание силы и развитие технологий, конечное потребление не выделяется. Рост технологического уровня, т.е. генерация новых технологий, происходит за счет инвестиций и самих технологий. При этом считается, что технологии создаются на основе уже имеющихся технологий, и чем выше достигнутый технологический уровень, тем легче их создать. Поскольку никаких характерных значений для ВВП и технологий нет, зависимости берутся степенные. Также учитывается выбытие технологий, который считается прямо пропорциональным уровню самих технологий (таким образом, на их поддержание нужны отчисления от ВВП, иначе технологический уровень падает). Сила растет за счет инвестиций, падает за счет старения, при этом падение полагается пропорциональным самой силе. В итоге имеем для субъекта следующую систему уравнений:

$$\frac{dT}{dt} = \lambda(\alpha V)^m T^n - \mu T = \lambda \kappa^m \alpha^m E^{ms} T^d - \mu T\,, \tag{17}$$

$$\frac{dE}{dt} = (1-\alpha)V - \gamma E = (1-\alpha)\kappa T E^s - \gamma E\,. \tag{18}$$

Здесь α – доля продукта V, направляемая на создание новых технологий, $0 \le \alpha \le 1$, μ – коэффициент износа технологий, γ – коэффициент снижения силы, характеризующий природные условия, а также системные издержки (например, коррупцию), κ – коэффициент, характеризующий отдачу технологий и силы при создании ВВП, λ – коэффициент, характеризующий инновационную восприимчивость субъекта (чем он больше, тем выше скорость создания технологий при тех же значениях T и E), s – показатель влияния уровня технологий на ВВП, считается $s < 1$, m – показатель влияния отчислений на развитие технологий, считается, что с их ростом происходит снижение отдачи, т.е. $m < 1$, n – показатель "чистого" влияния технологий на собственное развитие, $d = m + n$ – показатель итогового влияния технологий на собственное развитие.

Качественный анализ системы (17), (18) показал, что существует одно нетривиальное положение равновесия, тип которого определяется в зависимости от параметра $\Delta = (1–s)(1–n) – m$. Так, при $\Delta > 0$ положение равновесия является устойчивым узлом; при $\Delta < 0$ имеется седло, в этом случае устойчивыми будут нулевой и бесконечный аттрактор; при $\Delta = 0$ положение равновесия также неустойчивое, асимптотически имеет место экспоненциальное решение: $T \sim e^{at}$, $E \sim e^{bt}$, где $ab > 0$, т.е. обе переменные либо падают до ноля, либо неограниченно растут.

В случае *устойчивого узла* вариант развития динамической системы всегда один – выход основных переменных T и E на постоянные значения, определяемые по формулам:

$$E^* = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{\Delta}} \left(\frac{\kappa^{1-n}}{\gamma^{1-m-n}}\right)^{\frac{1}{\Delta}} \alpha^{\frac{m}{\Delta}} (1-\alpha)^{\frac{1-m-n}{\Delta}}, \tag{19}$$

$$T^* = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1-s}{\Delta}} \left(\frac{\kappa}{\gamma^{s}}\right)^{\frac{m}{\Delta}} \alpha^{\frac{m(1-s)}{\Delta}} (1-\alpha)^{\frac{ms}{\Delta}}. \tag{20}$$

Положение аттрактора зависит от многих параметров, но наиболее интересная зависимость – от параметра α, поскольку им можно управлять. Анализ формул (19), (20) показывает, что E^* максимально при $\alpha_E = \dfrac{m}{1-n}$, а T^* – при $\alpha_T = 1 - s$ (при этом, разумеется, $\alpha_E < \alpha_T$). Соответственно, если цель субъекта – максимизация силы, то ему надо брать $\alpha = \alpha_E$, если же его цель – максимизация уровня технологий, то надо брать $\alpha = \alpha_T$. Если агент стремится максимизировать обе величины, то наиболее выгодно держать параметр α в промежутке $[\alpha_E, \alpha_T]$, так как при этом достигается оптимум по Парето по обоим критериям. Зависимость положения равновесия от параметров m, n тоже понятна: чем они больше, тем меньше Δ, тем выше значения E^* и T^*, в пределе при $\Delta \to 0$ аттрактор становится бесконечным и получается экспоненциальный режим.

В случае *седла* имеет место либо неограниченный рост обеих переменных E и T в режиме с обострением, либо падение их до нуля, что можно трактовать как выживание или вымирание субъекта. На фазовой плоскости данное обстоятельство характеризуется областями выживания и вымирания, находящимися соответственно сверху или снизу от характеристической кривой – сепаратрисы.

За счет изменения параметров система может оказаться либо в одной, либо в другой области. Наибольший интерес вызывает возможность переброса из одной области в другую только за счет параметра α, которым, субъект может управлять. Таким образом, при каждом меняющемся α и фиксированных остальных параметрах имеем области выживания L_α и вымирания D_α, разделенные семейством характеристик K_α (рис. 9). Заметим при этом, что L_0, L_1 – пустые множества, т.е. значения $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ всегда дают вымирание, что нетрудно видеть непосредственно из системы (17), (18). Поэтому пересечение областей L_α пусто, а пересечение областей D_α непусто. То есть при любых параметрах существуют такие значения фазовых переменных (T, E), что за счет управления одним только параметром α исправить кризисную ситуацию нельзя и субъект вымирает – он попал в "зону смерти" (рис. 10). В то же время и гарантированной "зоны жизни" нет: всегда есть возможность ухудшить ситуацию так, что в системе настанет кризис.

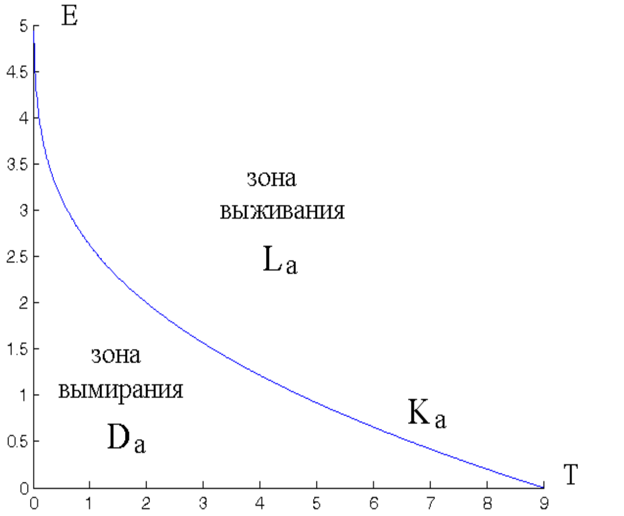


Рис. 9. Сепаратриса K_α, разделяющая зону выживания L_α и зону вымирания D_α агента.

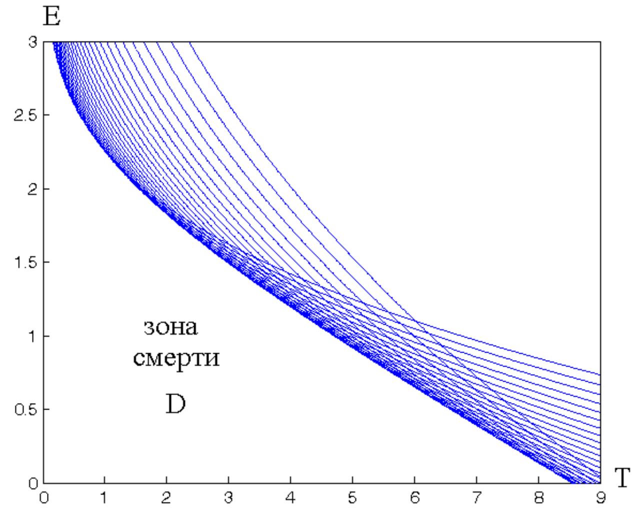


Рис. 10. Зона смерти D – область в пространстве (T, E), лежащая ниже огибающей семейства сепаратрис K_α. Картинка построена при $\alpha = 0.26 \div 0.8$ (с шагом 0.02).

Для каждой точки (T, E) на фазовой плоскости, не лежащей в зоне смерти D можно указать (α_1, α_2) – интервал выживания (т.е. те α, при которых точка находится в соответствующей зоне выживания L_α). На рис. 10 это иллюстрируется тем, что через каждую точку, лежащую выше зоны смерти D, проходит две сепаратрисы: $K_{\alpha 1}$ и $K_{\alpha 2}$.

Описанный режим может быть применен к проблеме вымирания или выживания обществ. Как следует из модели, на это влияет управление развитием. Крайние значения доли инвестиций в развитие технологий ($\alpha \approx 0$ и

$\alpha \approx 1$) всегда плохи для общества, поэтому следует держать этот параметр в промежутке между ними.

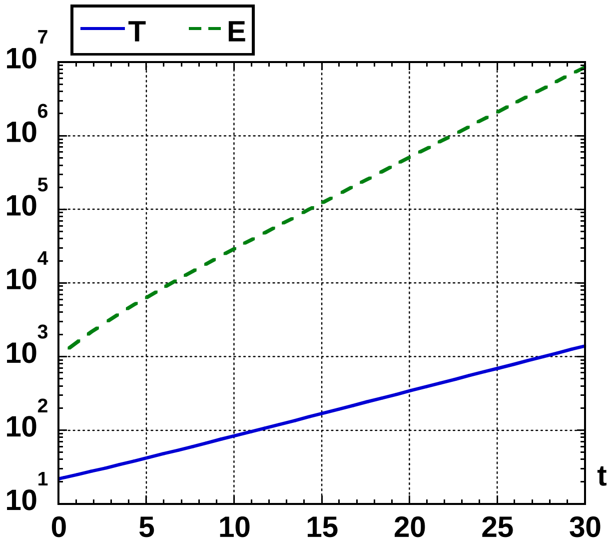


Рис. 11. Экспоненциальный режим развития агента. Переменные T и E представлены в логарифмическом масштабе. Параметры: $s = 0.5$, $m = 0.25$, $n = 0.5$, $\mu = 0.1$, $\kappa = 1$, $\lambda = 0.3$, $\gamma = 0.1$, $\alpha = 0.2$. Наклон асимптотики $\ln E$ в 2 раза выше, чем $\ln T$.

Экспоненциальный режим наблюдается при $m = (1–s)(1–n)$, т.е. при специальном подборе параметров[12]. При этом $T \sim e^{at}$, $E \sim e^{bt}$, где a, b – параметры. Как правило, в расчетах бралось $s = 0.5$, как наиболее характерное значение, при этом n может принимать значения от 0 до 1. На рис. 11 приведен типичный пример динамики агента в данном случае. При этом темпы роста технологий a и силы b связаны соотношением $a = b(1–s) = 0{,}5b$ или $b = 2a$. Т.е. сила на асимптотике пропорциональна квадрату уровня технологий: $E \sim T^{\,2}$ (на рис. 11 это показывает наклон прямых).

Как и в случае седла, здесь также имеется интервал выживания (α_1, α_2), внутри которого обе переменные T и E растут, а вне него убывают до нуля.

В случае *нескольких субъектов* появляется взаимодействие между ними. В модели оно представляет собой обмен произведенного продукта на технологии, фактически – *обмен силы на технологии*. Считается, что игроки обмениваются *попарно*, независимо от остальных игроков.

Опишем случай обмена двух игроков между собой. Процесс обмена протекает за малое время dt. Пусть T_1, E_1, V_1 – соответственно уровень технологий, сила и произведенный продукт 1-го игрока, а T_2, E_2, V_2 – 2-го, и пусть для определенности $T_1 > T_2$. В этом случае 1-ый игрок может продать часть технологий 2-ому игроку (точнее, 2-ой игрок может купить часть технологий у 1-ого в обмен на часть своего продукта). Таким образом, передача технологий может осуществляться лишь от более развитого субъекта менее развитому субъекту. При этом технологии остаются у того, кто их продает, т.е. технологический уровень 1-го игрока не понижается, в то время как 2-ой игрок часть продукта, пошедшего на обмен, теряет. Иначе говоря, для технологий закон сохранения не выполняется: технологии суть не материя, а, скорее, информация.

Предполагается, что 2-ой игрок может выставлять на обмен не весь продукт V_2, а только какую-то его долю ε_2. Эта доля является управляющим

[12] На практике необязательно, чтобы данное равенство выполнялось с абсолютной точностью, достаточно лишь, чтобы оно было приближенно верным. В этом случае режим, хотя и не будет являться экспоненциальным в строго математическом смысле, однако, в течение достаточно долгого промежутка времени будет на него сильно похож и, практически, не отличаться от него.

параметром, считается постоянной. Далее, нужно установить цену p, по которой будут куплены технологии. Для ее определения используется следующий механизм. Каждый игрок рассчитывает свою цену за технологии: 1-ый игрок – минимальную цену продажи $p_1 = \dfrac{(\alpha_1 V_1)^{1-m_1}}{\lambda_1 T_1^{n_1}}$, 2-ой игрок – максимальную цену покупки $p_2 = \dfrac{sE_2}{T_2}$. Если $p_2 < p_1$, то обмена нет. При $p_2 > p_1$ происходит обмен по промежуточной цене $p = \dfrac{p_1 T_2 + p_2 T_1}{T_1 + T_2}$.

После того, как цена установлена, осуществляется обмен: 1-ый игрок получает продукт $\varepsilon_2 V_2$, который направляется им на рост своей силы (т.е. фактически 1-ый игрок получает часть силы, отнесенной ко времени, которая и идет в соответствующее уравнение), при этом 2-ой игрок получает прибавку к уровню технологий за малое время dt, равную $\dfrac{\varepsilon_2 V_2}{p}$. Динамические уравнения для 1-го и 2-го игроков после обменов будут такими:

$$\frac{dT_1}{dt} = \lambda_1 (\alpha_1 V_1)^{m_1} T_1^{n_1} - \mu_1 T_1, \tag{21}$$

$$\frac{dE_1}{dt} = (1-\alpha_1) V_1 - \gamma_1 E_1 + \varepsilon_2 V_2, \tag{22}$$

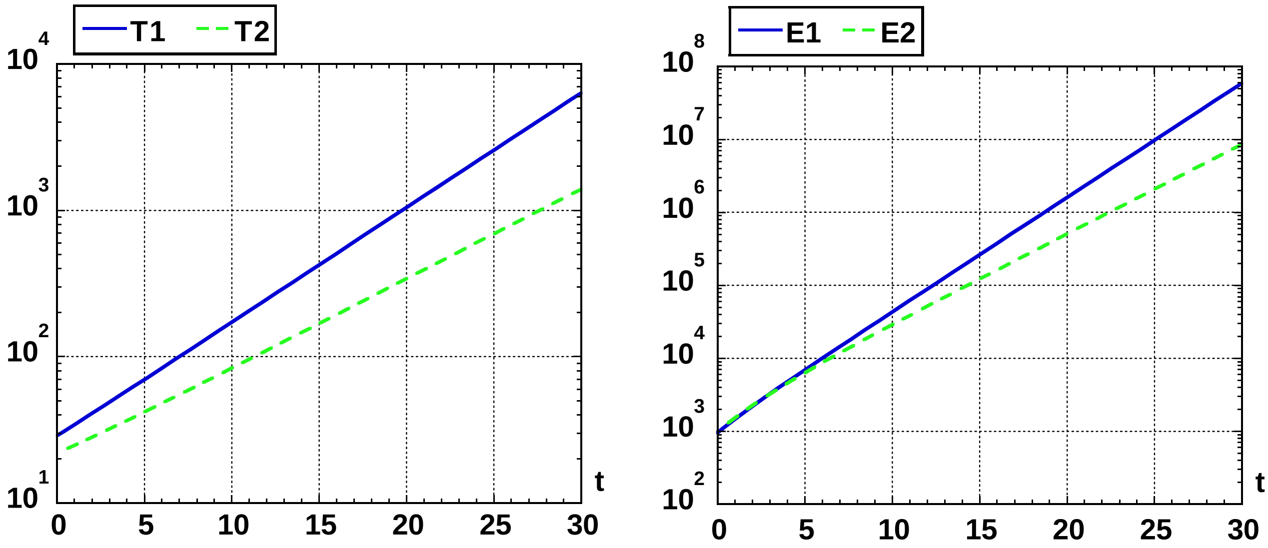
$$\frac{dT_2}{dt} = \lambda_2 (\alpha_2 V_2)^{m_2} T_2^{n_2} - \mu_2 T_2 + \frac{\varepsilon_2 V_2}{p}, \tag{23}$$

$$\frac{dE_2}{dt} = (1-\alpha_2) V_2 - \gamma_2 E_2 - \varepsilon_2 V_2. \tag{24}$$

Если $T_2 > T_1$, обмены протекают аналогичным образом, только с заменой индексов: в этом случае 1-ый игрок покупает технологии у 2-го.

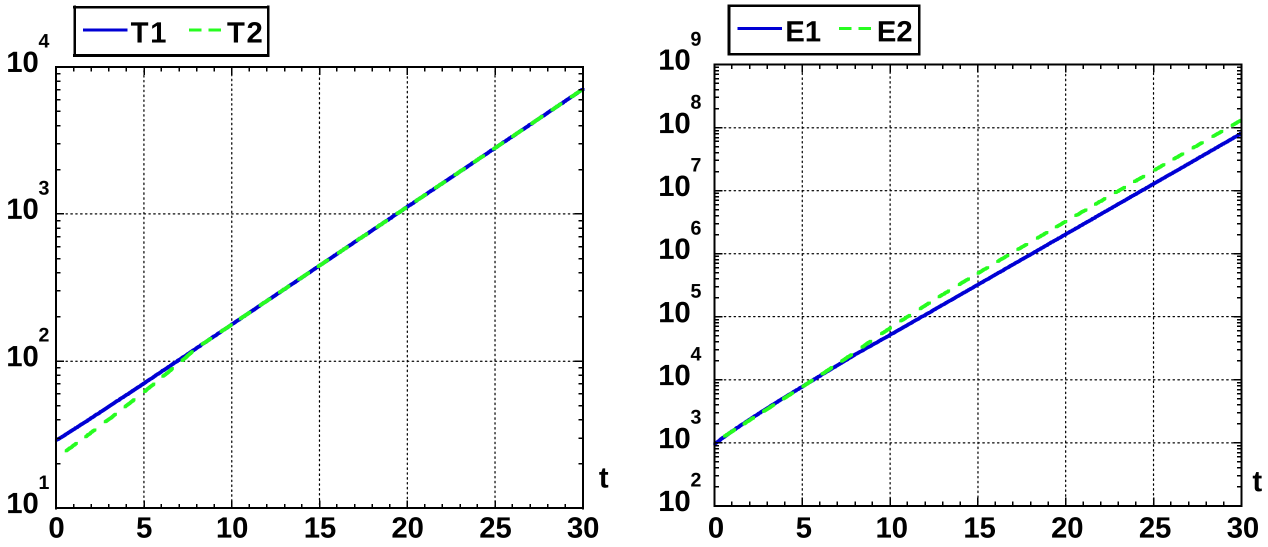
В модели закладывается универсальность параметров s, μ, к для всех игроков, параметры m, n, λ, γ для каждого игрока свои. Параметры α, ε считаются управляющими, с помощью которых каждый игрок влияет на динамику всей системы в целом. Параметры m, n, s считались связанными соотношением $m = (1-s)(1-n)$, т.е. в отсутствие обменов каждый игрок развивается экспоненциально. Обычно в расчетах бралось $s = 0.5$.

В рамках построенной модели (21)–(24) исследовался вопрос, может ли при включении обменов отстающий игрок догнать или обогнать лидера. Оказывается, такое возможно, но для этого игрок, отстающий в развитии технологий, должен иметь хотя бы небольшое преимущество в наращивании силы, например по параметру γ (проигрывая при этом по параметру λ). На рисунках 12 и 13 представлено сравнение динамики обоих игроков в отсутствие обменов (рис. 12) и при их наличии (рис. 13), когда отстающий в развитии нагоняет лидера по технологиям и обгоняет по силе. При этом рассмотрена ситуация равенства всех параметров, кроме λ и γ: $\lambda_1 > \lambda_2$, $\gamma_1 > \gamma_2$.



а) б)

Рис. 12 Динамика основных переменных T_1, T_2 и E_1, E_2 двух игроков в отсутствие обменов. Масштаб логарифмический. Как видно, 1-ый игрок обгоняет 2-го по обеим переменным. Параметры: $s = 0.5$, $\mu = 0.1$, $\kappa = 1$, $m_1 = m_2 = 0.25$, $n_1 = n_2 = 0.5$, $\lambda_1 = 0.4$, $\lambda_2 = 0.3$, $\gamma_1 = 0.3$, $\gamma_2 = 0.1$, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.2$.



а) б)

Рис. 13. Динамика основных переменных T_1, T_2 и E_1, E_2 двух игроков при наличии обменов. Масштаб логарифмический. Как видно, 2-ой игрок догоняет 1-го по технологиям и обгоняет по капиталу. Параметры те же, что и на рис. 12.

Происходит *синхронизация* развития игроков: они начинают развиваться в одном темпе. При этом по технологиям достигается полное совпадение, а по силе 1-ый игрок отстает от 2-го на одно и то же время (т.е. запаздывание между ними постоянное). Таким образом, игроки демонстрируют единство. Помимо самого факта обмена также важен параметр ε (т.е. доля ВВП, посылаемая на обмен): если он слишком мал или слишком велик, эффекта не возникает.

Список публикаций по теме диссертации:

1.* *Геловани В.А., Куракин П.В., Малинецкий Г.Г., Махов С.А.* Стационарные решения в модифицированной модели Форрестера // Доклады Академии наук. – Москва: Наука. – 2005. – Т. 401, №2. – С. 151–153.

2. *Махов С.А., Малинецкий Г.Г., Посашков С.А.* и др. Проект системы научного мониторинга и кризисы современной России // Вестник РАЕН. – Москва. – 2003. – Т. 3, №4. – С. 71–79.
3. *Малинецкий Г.Г., Махов С.А., Посашков С.А.* Процессы глобализации и компьютерное моделирование // Глобализация: синергетический подход / Под общ. ред. В.К. Егорова. – Москва: РАГС. – 2002. – С. 34–41.
4. *Махов С.А.* Устойчивое развитие с точки зрения глобального моделирования // Материалы X международной конференции "Проблемы управления безопасностью сложных систем". – Москва: РГГУ. – 2002. – Т. 2.– С. 75–77.
5. *Makhov S.A.* Sustainable development from standpoint of global modeling // V International congress on mathematical modeling / Book of abstracts. – Dubna: JANUS-K. – 2002. – V. 1. – P. 28.
6. *Махов С.А.* Стационарные решения в модифицированной модели Форрестера с управлением // Труды XLVI научной конференции МФТИ (ГУ) "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук", часть 7. – Москва, Долгопрудный: МФТИ. – 2003. – С. 173.
7. *Малинецкий Г.Г., Махов С.А., Посашков С.А.* Процессы глобализации, устойчивое развитие и компьютерное моделирование // Безопасность Евразии. – Москва. – 2003. – №4. – С. 292–309.
8. *Махов С.А.* Устойчивое развитие с точки зрения математического моделирования // Труды XI международной конференции "Проблемы управления безопасностью сложных систем", часть 2. – Москва: РГГУ. – 2003. – С. 132–134.
9. *Махов С.А.* Модель взаимодействия трех государств // Труды XII международной научной конференции "Проблемы управления безопасностью сложных систем". – Москва: РГГУ. – 2004. – С. 43–45.
10. *Малинецкий Г.Г., Махов С.А., Посашков С.А.* Процессы глобализации, устойчивое развитие и математическое моделирование // Материалы международной научно-практической конференции "Стратегии динамического развития России: единство самоорганизации и управления". – Москва: Проспект. – 2004. – Т. 3, ч. 1. – С. 150–156.
11. *Makhov S.A., Posashkov S.A.* Sustainable development and mathematical modelling // Труды Международной конференции "Математическое

моделирование социальной и экономической динамики". – Москва: РГСУ. – 2004. – С. 191–194.

12. *Махов С.А.* Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2005. – №6 –24 с.
13. *Махов С.А.* Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере феноменологической модели // Материалы международной конференции "Системный анализ и информационные технологии". – Переславль. – 2005. – С. 56–59.
14. *Махов С.А.* Модель конкурентной борьбы трех игроков // Труды XIII международной конференции "Проблемы управления безопасностью сложных систем". – Москва: РГГУ. – 2005. – С. 441–443.
15. *Махов С.А.* Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера // Новое в синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение / Серия "Фракталы. Хаос. Вероятность". – Москва: Радиотехника. – 2006. – Часть 1. – С. 49–62.
16. *Махов С.А.* Устойчивое развитие с точки зрения математического моделирования // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2006. – №63. – 21 с.
17. *Махов С.А.* Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера // Новое в синергетике. – Москва: Наука. – 2007. – С. 79–101.
18. *Махов С.А.* Феноменологическая макромодель мировой динамики и устойчивого развития / Материалы международной междисциплинарной научной конференции "Идеи синергетики в естественных науках" (Вторые Курдюмовские чтения). – Тверь: Тверской государственный университет. – 2006. – С. 285–287.
19. *Махов С.А.* Феноменологическая макромодель мировой динамики и устойчивого развития // Тезисы Международной конференции "Математическое моделирование исторических процессов". – Москва: ИПМ РАН. – 2007. – С. 46–47.
20. *Махов С.А.* Устойчивое развитие с позиции математического моделирования // Синергетика: Будущее мира и России. – Москва: ЛКИ. – 2008. – С. 133–152.
21. *Махов С.А.* Модель взаимодействия региональных игроков // Проблемы математической истории: Математическое моделирование исторических процессов. – Москва: Либроком. – 2008. – С. 118–130.

* – статьи в журналах, включенных в перечень ВАК

Подписано в печать 14.11.2008. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 1,23. Тираж 100 экз. Заказ 9-28.
Отпечатано в ИПМ им.М.В.Келдыша РАН. 125047, Москва, Миусская пл., 4