На правах рукописи

Евсеева Юлия Юрьевна

КОЛИЧЕСТВО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ БИНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2008

Работа выполнена на кафедре алгебры и теории чисел Владимирского государственного гуманитарного университета.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Владимир Георгиевич Журавлев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Сергей Геннадьевич Танкеев

кандидат физико-математических наук Антон Владимирович Шутов

Ведущая организация – Санкт-Петербургское отделение математического института РАН им. В.А. Стеклова

Защита диссертации состоится 5 декабря 2008 г. в 14 ч.00 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144, аудитория 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Автореферат разослан 1 ноября 2008 года.

Ученый секретарь диссертационого совета С.И. Яблокова

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Работа посвящена изучению представлений натуральных чисел многоклассными бинарными квадратичными формами.

Пусть m - натуральное число, $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ - положительно определенная бинарная квадратичная форма с целыми коэффициентами и дискриминантом $D = b^2 - 4ac$, и пусть $r(f,m)$ равно количеству решений уравнения

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m \text{ в целых числах } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Задача о количестве представлений $r(f,m)$ является классической задачей теории чисел. Диксон[1] в своей монографии подробно описал историю изучения бинарных квадратичных форм.

Ферма рассмотрел задачу представимости числа в виде

$$x^2 + y^2 = m.$$

Эйлер, а затем Лагранж полностью решили задачу Ферма о двух квадратах. Ими же были рассмотрены и другие конкретные квадратичные формы. Исследования в этом направлении привели Лежандра в 1798 г. к открытию закона взаимности - центральной задаче теории числел 19-го столетия.

Гаусс впервые начал изучать случай произвольных бинарных квадратичных форм. Он ввел понятие эквивалентности квадратичных форм. На множестве классов бинарных квадратичных форм фиксированного дискриминанта Гаусс определил операцию композиции, относительно которой множество классов образует коммутативную группу. В последствии операция умножения получила название гауссовой композиции.

На протяжениии 19 века была выявлена связь бинарных квадратичных форм с квадратичными полями (Кронекер, Дирихле, Дедекинд). На основе этой связи удалось доказать общую формулу для суммы количества представлений натурального числа формами данного дискриминанта. Если форма одноклассная то эта формула принимает вид

$$r(f,m) = e(D)\rho(m), \tag{1}$$

где $e(D)$ - число целых автоморфизмов формы $f(x,y)$, $\rho(m)$ - мультипликативная функция, определенная на степенях простых чисел следующим образом:

$$\rho(p^\alpha) = \alpha + 1 \text{ для } \chi_1(p) = +1;$$

[1] Dickson L.E. History of the theory of numbers vol.3, Quadratic and higher forms N.Y. 1992, p.313.

$$\rho(p^\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } 2 \mid \alpha \\ 0, \text{ если } 2 \nmid \alpha \end{cases} \quad \text{для } \chi_1(p) = -1;. \tag{2}$$

$$\rho(p^\alpha) = 1 \text{ для } \chi_1(p) = 0.$$

В этих формулах $\chi_1(p)$ - характер Дирихле мнимого квадратичного поля дискриминанта D.

20 век ознаменовался в теории квадратичных форм появлением двух фундаментальных идей.

Первая - это идея связанная с модулярными формами (Пуанкаре, Клейн) и операторами Гекке. Каждой квадратичной форме ставится в соответствие ее тета-ряд, который является модулярной формой, её уровень определяется дискриминантом. Все такие модулярные формы образуют конечномерное векторное пространство, инвариантное относительно операторов Гекке. Любая модулярная форма может быть разложена по базису собственных функции операторов Гекке. Задача о представимости числа эквивалентна вычислению коэффициентов тета-ряда, что, в свою очередь, сводится к его разложению по базису из собственных функций. Данный подход подробно изложен в книге[2] Петерссона, и в принципе позволяет получать формулы представлений в том случае, когда известен базис. Однако его нахождение представляет собой отдельную, крайне трудную, не решенную до сих пор задачу.

Вторая - это идея, основанная на дальнейшем развитиии идеи Гаусса о родах квадратичных форм. Зигель[3] доказал общую формулу для числа представлений родом квадратичных форм. Наиболее сильные результаты в этом направлении были получены Журавлевым[4] и Шимурой[5]. Позднее Шульце-Пилот обобщил формулу Зигеля на случай спинорного рода, открытого Эйхлером. Для бинарных форм формула (1) вытекает как частный случай из формулы Зигеля.

Задача о количестве представлений чисел квадратичными формами была решена для некоторых форм специального вида[6]. Однако, несмотря на все эти достижения, задача о количестве представлений числа произвольной бинарной квадратичной формой так и оставалась не решена.

Цель работы

Получить формулу для количества представлений натуральных чисел бинарными многоклассными квадратичными формами. Рассмотреть случаи бинарных

[2] Petersson H., Modulfunktionen und quadratische Formen, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, v. 100, 1982, pp.305.

[3] Siegel C.L. Über die analytische Theorie der Quadratischen Formen // Ann. Math. 1935. 36. s. 527 – 606.

[4] Журавлёв В.Г. Представление квадратичных форм родом квадратичных форм // Алгебра и анализ. 1996. Т.8. № 1. С. 21–112.

[5] Shimura G., The number of representations of an integer by a quadratic form. Duke Mathematical Journal, 1999, v. 100, n. 1, p. 59-92.

[6] Buel D.A. Binary Quadratic Forms, Classical Theory and Modern Computations, N.Y., 1989, p.247

квадратичных форм с числом классов $h \leq 4$ и произвольной циклической группы класов. Получить и доказать основные арифметические свойства для числа представлений.

Научная новизна

Впервые получена точная формула для количества представлений натурального числа произвольной бинарной положительно определенной многоклассной квадратичной формой. Выявлены основные арифметические свойства количества представлений, позволяющие по числу представлений судить о числе классов форм.

Основные методы исследования

При исследовании использованы арифметическая теория квадратичных форм, операторы Гекке и тета-ряды.

Теоретическая и практическая ценность работы

Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в арифметической теории квадратичных форм для решения диофантовых уравнений и систем.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на Международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики (Петровские чтения) (Казань, 2006 г.), XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, 2006 г.), XXVI-II Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2006 г.), Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию проф. В.Е. Воскресенского (Самара, 2007 г.), на научных конференциях профессорско-преподавательского состава ВГГУ (2006-2007 гг., секция "Алгебра и теория чисел"), а также неоднократно обсуждались на научном семинаре по теории чисел ВГГУ под руководством доктора физико-математических наук, профессора В.Г. Журавлева.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[5], в том числе одна работа — в журнале из перечня ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, содержащих 13 параграфов и списка литературы из 28 наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет 75 страниц машинописного текста.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность и указывается степень разработанности проблемы, формулируется цель исследования и формулируются основные результаты диссертации.

В первой главе представлены общие сведения о бинарных квадратичных формах, мнимых квадратичных полях, соответствии между модулями в квадратичном поле и бинарными квадратичными формами. Опираясь на теорию операторов Гекке и гауссову композицию квадратичных форм, получена общая формула для количества представлений натуральных чисел бинарными квадратичными формами.

Рассмотрим бинарные квадратичные положительно определенные формы дискриминанта $D<0$, где D совпадает с дискриминантом мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, D_1 - бесквадратная часть D, $\mathfrak{J}(D_1)=\{C_0,C_1,...,C_{h-1}\}$ - группа классов форм, $f_i\in C_i$ и $r(f_i,m)$ - число решений уравнения

$$f_i(x,y)=a_ix^2+b_ixy+c_iy^2=m,\quad x,y\in Z. \tag{3}$$

В диссертации доказана

Теорема 1.10. *Для количества представлений $r(f_i,m)$ (i=0,...,h-1) натурального числа бинарными квадратичными формами $f_i(x,y)$, выполняется формула*

$$r(f_i,m)=\frac{1}{h}\sum_{\varkappa}\varkappa(C_i)^{-1}r(\varkappa,m), \tag{4}$$

где $\varkappa$ пробегает все характеры группы $\mathfrak{J}(D_1)$ порядка h, $r(\varkappa,m)$ - коэффициенты Фурье тета-ряда $\Theta(z,\varkappa)$

$$\Theta(z,\varkappa)=\sum_{i=1}^{h}\varkappa(C_i)\Theta(z,C_i), \tag{5}$$

$$r(\varkappa,m)=r(\varkappa,1)\widehat{\varkappa}(m), \tag{6}$$

$\widehat{\varkappa}(m)$ - собственные значения этого тета-ряда для операторов Гекке $T(m)$ и при этом

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\widehat{\varkappa}(m)}{m^s}=\prod_{p\in P}(1-\frac{\widehat{\varkappa}(p)}{p^s}+\frac{\chi_1(p)}{p^{2s}})^{-1}. \tag{7}$$

Во второй главе рассмотрены бинарные квадратичные формы с числом классов $h \leq 4$.

Случай двуклассных бинарных квадратичных форм. Пусть $C_0 = \{f_0\}$ и $C_1 = \{f_1\}$ - различные классы форм дискриминанта D, где f_0 представляет 1.

Теорема 2.1. *Для количества представлений $r(f_i, m)$ в случае $h = 2$ справедливы следующие равенства:*

$$r(f_0, m) = (1 + \varkappa_1(m))\rho(m), \tag{8}$$

$$r(f_1, m) = (1 - \varkappa_1(m))\rho(m), \tag{9}$$

где $\varkappa_1(m)$ - вполне мультипликативная функция, для простых p с $\chi_1(p) = +1$ или 0 задаваемая равенствами

$$\varkappa_1(p) = \begin{cases} 1, \textit{если } r(f_0, p) > 0, \\ -1, \textit{если } r(f_1, p) > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Из теоремы 2.1 непосредственно вытекает следующее свойство: *если $h = 2$ и число m представимо хотя бы одной из форм f_0 или f_1, то данное число m представимо только одной из указанных форм.*

Случай трехклассных бинарных квадратичных форм. В этом случае классы бинарных квадратичных форм удобно пронумеровать следующим образом: C_0, C_1, C_2, $C_i = \{f_i\}$ $(i = 0, 1, 2)$. При этом гауссова композиция записывается в виде:

$$C_i * C_j = C_{i+j \pmod 3}. \tag{11}$$

Теорема 2.3. *При $h = 3$ имеют место следующие формулы для количества представлений $r(f_i, m)$ натуральных чисел m:*

$$r(f_0, m) = \frac{2}{3}(\widehat{\varkappa_0}(m) + 2\widehat{\varkappa_1}(m)), \tag{12}$$

$$r(f_1, m) = r(f_2, m) = \frac{2}{3}(\widehat{\varkappa_0}(m) - \widehat{\varkappa_1}(m)), \tag{13}$$

где $\widehat{\varkappa}_i(m)$ - мультипликативные функции, определяемые формулами

$$\widehat{\varkappa_0}(m) = \rho(m) = \sum_{\delta | m} \chi_1(\delta), \tag{14}$$

$$\widehat{\varkappa_1}(p^\alpha) = \rho(p^\alpha) \textit{ для } \chi_1(p) = -1, 0 \textit{ или } \chi_1(p) = +1 \textit{ и } \varkappa_1(p) = +1, \tag{15}$$

$$\widehat{\varkappa_1}(p^\alpha) = \varepsilon(\alpha) \textit{ для } \chi_1(p) = +1 \textit{ и } \varkappa_1(p) \neq +1. \tag{16}$$

В этих формулах $\varepsilon(\alpha)$ задается следующим образом

$$\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha \equiv 0 \pmod 3, \\ -1, \text{ если } \alpha \equiv 1 \pmod 3, \\ 0, \text{ если } \alpha \equiv 2 \pmod 3). \end{cases} \quad (17)$$

Во второй главе диссертации рассматриватеся обратная задача теории представлений чисел неодноклассными бинарными квадратичными формами. Эта задача состоит в том, чтобы по числу представлений получать информацию об отдельной квадратичной форме, рассматриваемой как элемент группы классов форм $\mathfrak{J}$.

Доказаны следующие арифметические свойства для представления чисел трехклассными квадратичными формами, сформулированные как следствия 2.1 - 2.4.

Для числа решений $r(f_j, m^3)$ диофантова уравнения $f_j(x, y) = m^3$ $(j = 0, 1, 2)$, где m - любое натуральное число, справедливо следующее свойство ассиметрии

$$r(f_0, m^3) \geq r(f_i, m^3) \text{ для } i = 1, 2. \quad (18)$$

Найдено условие, при котором натуральное число m представляется только одной трехклассной формой: *если m не делится ни на какое простое число p, представляемое квадратичной формой f_1, то*

$$\begin{cases} r(f_0, m) = 2\rho(m), \\ r(f_1, m) = r(f_2, m) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

С другой стороны, доказано, что существуют натуральные числа m, для которых количества представлений трехклассными квадратичными формами равны:

1) Пусть p - простое число, $p \nmid D$, $f_1(x, y) = p$. Тогда для любого натурально m взаимно простого с p, и $\alpha = 3\alpha' + 2$ с $\alpha' = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$r(f_0, p^\alpha \cdot m) = r(f_i, p^\alpha \cdot m) = \frac{2}{3}\rho(m) \ (i = 1, 2) \quad (20)$$

2)Если m представляется формой f_0 и f_1, и в разложении m на степени простых чисел содержится $p^{3\alpha+2}$, где $\chi_1(p) = +1$ и p представимо формой f_1, то

$$r(f_0, m) = r(f_i, m) = \frac{2}{3}\tau_D(m') \ (i = 1, 2), \quad (21)$$

где $m'|m$ *состоит из степеней* p^α *с* $\chi_1(p)=+1$ *и*

$$\tau_D(m')=\sum_{\delta|m'(\delta,D)=1} 1. \tag{22}$$

Получено, что *любая трехклассная бинарная квадратичная форма имеет дискриминант*

$$D=-p,\ \text{где } p \text{ - простое число, } p\equiv 3 \pmod 4, \tag{23}$$

при этом данное простое число p *представимо формой* f_0.

Случай четырехкласных бинарных квадратичных форм. Пусть группа классов бинарных квадратичных форм четвертого порядка циклическая относительно операции гауссовой композиции:

$$\left\{C_0, C_1, C_2, C_3 : C_i * C_j = C_{i+j \pmod 4}\right\} \tag{24}$$

Пусть

$$n(p)=i, \text{ если } f_i(x,y)=p. \tag{25}$$

m обладает свойством СВ. 1, если найдется такое простое число p , что

$$\chi_1(p)=+1\ ,\ n(p)=1 \text{ и } p^\alpha||m \text{ с } \alpha\equiv 1 \pmod 2, \tag{26}$$

где $p^\alpha||m$ означает что $p^\alpha|m$ и $p^{\alpha+1}\nmid m$,
Аналогично, число m обладает свойством СВ. 2, если

$$\chi_1(p)=+1\ ,\ n(p)=1 \text{ и } p^\alpha||m \text{ с } \alpha\equiv 0 \pmod 2. \tag{27}$$

Далее, m удовлетворяет свойству СВ. 3, если из условия

$$p^\alpha||m \text{ с } \alpha\equiv 1 \pmod 2 \text{ следует } \chi_1(p)=0 \text{ или } +1. \tag{28}$$

В диссертации получены следующие свойства для количества представлений натуральных чисел четырехклассными бинарными квадратичными формами, сформулированные в виде следствий 2.5 - 2.9.

Следствие 2.5. *Для циклических четырехклассных бинарных квадратичных форм и натурального* $m\in$*СВ. 3 условие* $m\in$*СВ. 1 равносильно равенству*

$$r(f_0,m)=r(f_2,m). \tag{29}$$

При этом возможны 2 случая:

$$r(f_0,m)=r(f_2,m)=\rho(m) \text{ и } r(f_1,m)=r(f_3,m)=0, \tag{30}$$

или

$$r(f_0, m) = r(f_2, m) = 0 \text{ и } r(f_1, m) = r(f_3, m) = \rho(m). \tag{31}$$

Следствие 2.6. *Для представлений m циклическими четырехклассными формами условие*

$$r(f_0, m) = 0 \text{ или } r(f_2, m) = 0 \tag{32}$$

выполняется тогда и только тогда, когда m не делится на простое p с $\chi_1(p) = +1$ и $n(p) = 1$, где $n(p)$ - функция (25).

Следствие 2.7. *В циклическом случае при $h = 4$ имеют место неравентва для $m \in$СВ. 3:*

$$r(f_i, m) \neq r(f_j, m) \text{ для } i \neq j = 0, 1, 2 \tag{33}$$

тогда и только тогда, когда $m \notin$СВ. 1 и $m \in$СВ. 2.

Следствие 2.8. *Не существует натурального числа m, представимого*

$$r(f_i, m) > 0 \text{ для всех } i = 0, 1, 2, 3 \tag{34}$$

всеми четырехклассными циклическими квадратичными формами данного дискриминанта.

Следствие 2.9. *Для четырехклассных циклических квадратичных форм справедливо утверждение: если p - простое число с $\chi_1(p) = +1$, $n(p) = 1$, то*

$$r(f_0, p^2) = 2\ ,\ r(f_2, p^2) = 4, \tag{35}$$

$$r(f_1, p^2) = r(f_3, p^2) = 0.$$

Пусть группа классов бинарных квадратичных форм четвертого порядка нециклическая. Тогда удобно использовать следующую нумерацию:
$\{C_{0,0}, C_{0,1}, C_{1,0}, C_{1,1}\}, C_{i,j} = \{f_{i,j}\}$. В этих обозначениях гауссова композиция записывается в виде

$$C_{i,j} * C_{k,l} = C_{i+k, j+l} \pmod 2$$

Получена формула для количества представлений натуральных чисел даными формамии и как следствие из нее следующее арифметическое свойство для числа представлений.

Натуральное число m, удовлетворяющее СВ. 3, представляется одной и только одной нециклической четырехклассной бинарной квадратичной формой $f_{i,j}(x, y)$ и число представлений равно

$$r(f_{i,j}, m) = 2\rho(m). \tag{36}$$

В третьей главе диссертации рассмотрены циклические бинарные квадратичные формы произвольного порядка.

Пусть группа классов бинарных квадратичных форм циклическая порядка h: $\{C_0, C_1, ..., C_{h-1} : C_i * C_j = C_{i+j \pmod h}\}$.
Фиксируем для натурального m разложение на множители

$$m = m_0 \cdot m_+ \cdot m_- \tag{37}$$

с взаимнопростыми m_0, m_+, m_- вида

$$m_0 = r_1^{\gamma_1} \cdots r_e^{\gamma_e} \quad \text{с} \quad \chi_1(r_i) = 0, \tag{38}$$

$$m_+ = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n} \quad \text{с} \quad \chi_1(p_i) = +1, \tag{39}$$

$$m_- = q_1^{\delta_1} \cdots q_f^{\delta_f} \quad \text{с} \quad \chi_1(q_i) = -1. \tag{40}$$

Далее, пусть

$$\delta_1 \equiv \cdots \equiv \delta_f \equiv 0 \pmod 2. \tag{41}$$

На множестве простых p с условием $\chi_1(p) = 0$ или $+1$ введем функцию

$$a(p) = i, \quad \text{если} \quad r(f_i, p) > 0 \quad \text{с} \quad 0 \le i \le h/2. \tag{42}$$

В диссертации получена формула для количества представлений натуральных чисел неодноклассными циклическими бинарными квадратичными формами и как следствия из нее получены арифметические свойства числа количества представлений.

Следствие 3.1. *Для циклических форм нечетного порядка h количество представлений $r(f_i, m)$ числа $m = m_0 \cdot m_+ \cdot m_-$ (37) с условием, что m_- удовлетворяет сравнениям (41), не зависит от множителей m_0, m_-.*

Следствие 3.2. *Если группа классов форм циклическая, h нечетное и для $m = m_0 \cdot m_+ \cdot m_-$ в множитель m_+ (39) входит степень $p_i^{\alpha_i}$ с Н.О.Д.$(a(p_i), h)=1$ и $\alpha_i \equiv h-1 \pmod h$, тогда выполняются равенства*

$$r(f_0, m) = r(f_1, m) = ... = r(f_{h-1}, m). \tag{43}$$

Если m_- дополнительно удовлетворяет условию (41), то

$$r(f_i, m) = \frac{e(D_1)}{h}(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_n + 1) \text{ для } 0 \le i \le h-1. \tag{44}$$

Если $h = p$ - нечетное простое число, то достаточно потребовать существование степени $p_i^{\alpha_i} | m_+$ с $a(p_i) \neq 0$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Георгиевичу Журавлеву за постановку задачи, руководство и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

1. Общая формула для количества представлений натуральных чисел многоклассными бинарными квадратичными формами.

2. Решение обратной задачи теории представлений чисел неодноклассными бинарными квадратичными формами.

Публикации автора по теме диссертации

Публикация в журнале из перечня ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук:

1. Евсеева Ю.Ю. Арифметические свойства представлений натуральных чисел бинарными квадратичными формами / Ю.Ю. Евсеева, В.Г. Журавлев // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия. Самара, 2007. № 7. - С.56-62.

Другие публикации:

2. Евсеева, Ю.Ю. О количестве представлений числа трехклассной бинарной квадратичной формой / Ю.Ю. Евсеева // Материалы XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". - Москва: Изд-во МГУ, 2006. - T.IV. - С.83-84.

3. Евсеева Ю.Ю. О количестве представлений чисел неодноклассными бинарными квадратичными формами / Ю.Ю. Евсеева // Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ. - Москва: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2006. - С. 51-53.

4. Евсеева Ю.Ю. Представление чисел четырехклассными бинарными квадратичными формами / Ю.Ю. Евсеева // Тезисы докладов XVIII Международной летней школы-семинара "Волга-18'06"по современным проблемам теоретической и математической физики (Петровские чтения). - Казань: Изд-во КГУ, 2006. - С. 45-46

5. Евсеева Ю.Ю. Представление натуральных чисел трехклассными бинарными квадратичными формами / Ю.Ю. Евсеева // Международная конференция по алгебре и теории чисел, посвященная 80-летию В.Е. Воскресенского. - Самара, Россия, 21-25 мая, 2007. - С. 20-21

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 1,0	Уч. изд. л. 1,0
Заказ	Тираж 100

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной полиграфии ВГГУ, 600024, г.Владимир, ул. Университетская, 2