*На правах рукописи*

Душистова Анна Александровна

# О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ШТЕРНА-БРОКО И ФУНКЦИИ МИНКОВСКОГО

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2008

Работа выполнена на кафедре теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Николай Германович Мощевитин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Владимир Георгиевич Журавлев

кандидат физико-математических наук, Игорь Давидович Кан

Ведущая организация – Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН

Защита диссертации состоится 10 октября 2008 г. в 14-00 на заседании диссертационного совета Д.212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144, аудитория 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Автореферат разослан 8 сентября 2008 года.

Ученый секретарь диссертационого совета С.И. Яблокова

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Одним из важнейших инструментов анализа в теории диофантовых приближений является аппарат цепных дробей. Многие вопросы, связанные со свойствами разложений в цепные дроби вещественных чисел, являются классическими. Основы современной теории цепных дробей восходят к трудам таких математиков, как Л. Эйлер, Дж. Л. Лагранж, А. Лежандр, К.Ф. Гаусс. Систематическое изложение теории цепных дробей имеется, например, в книгах О. Перрона[1] и А.Я. Хинчина[2]. Другим классическим объектом теории чисел, естественным образом связанным с цепными дробями, являются ряды Фарея. Они появились в 1816 году в работах самого Дж. Фарея[3], а в начале XX века были обнаружены связи вопросов о распределении дробей Фарея со сложными задачами аналитической теории чисел[4]. Несколько менее известным объектом являются так называемые последовательности Штерна-Броко, появившиеся в работах М. Штерна[5] и А. Броко[6] соответственно в 1858 и 1862 годах. Эти последовательности, естественным образом связанные с рядами Фарея, имеют также отношение к широко известной функции Г. Минковского $?(x)$, рассмотренной им в 1904 году[7]. Отметим, что функция Минковского $?(x)$ была переоткрыта А. Данжуа в 1932 году[8]. Позднее функция Минковского была переоткрыта еще несколькими математиками.

Рассмотрим следующий способ построения всех неотрицательных несократимых дробей, носящий название дерева Штерна-Броко. Начнем с двух соседних дробей $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$. На каждом шаге между двумя соседними дробями $\frac{p}{q}$

[1] O. Perron. Die Lehre von den Kettenbruechen.// Stuttgart (1957)

[2] А. Я. Хинчин. Цепные дроби.// М.: Физматлит (1960)

[3] Farey, J. "On a Curious Property of Vulgar Fractions."// London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. 47, 385 (1816)

[4] E. Landau, "Primzahlen"// Zwei Bd., IInd ed., with an Appendix by Dr. Paul T. Bateman, Chelsea, New York (1953)

[5] Stern, M. A. "Uber eine zahlentheoretische Funktion."// J. reine angew. Math. 55, 193-220 (1858)

[6] A.Brocot. Calcul des Rouages par Approximations,Nouvelles *Méthodes*.// Paris (1892)

[7] Minkowski H. Gesammelte Abhandlungen vol.2 (1911)

[8] A. Denjoy. "Sur quelques points de la theorie des fonctions."// CR Acad. Sci. Paris, 194 (1932) 44-46

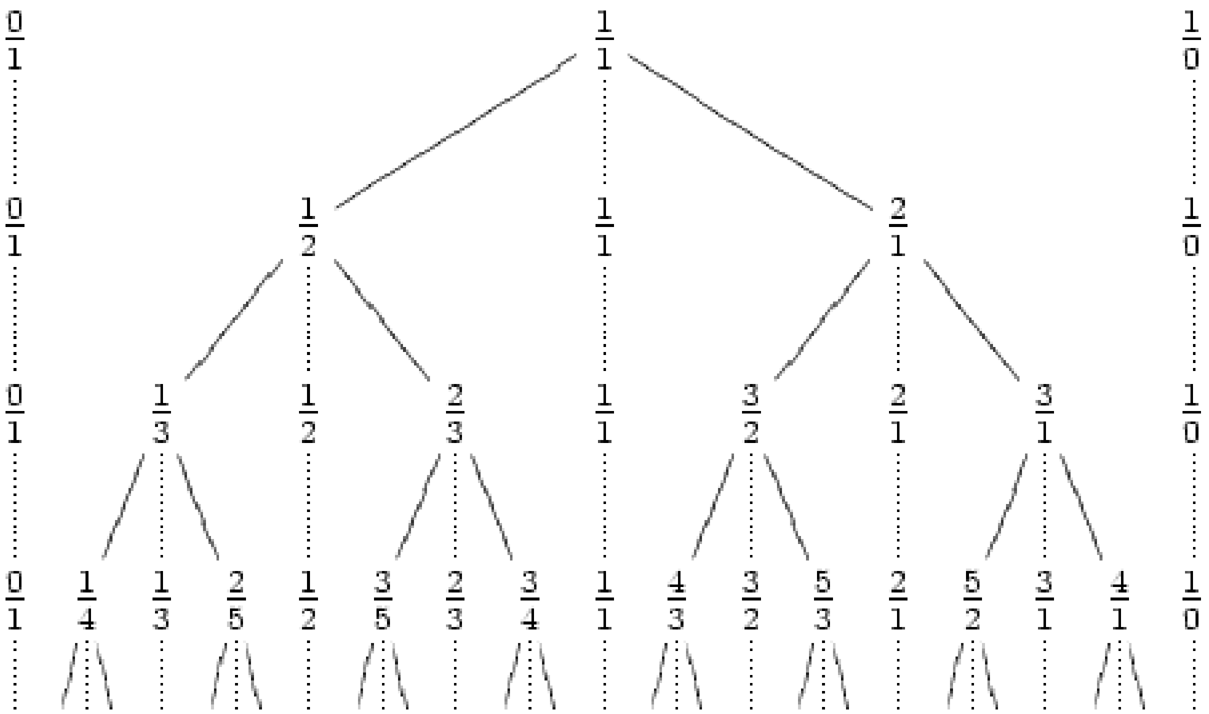

Рис. 1: Дерево Штерна-Броко.

и $\frac{p'}{q'}$ будем записывать их медианту

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}.$$

Например, первый шаг добавляет одну дробь между $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0},$$

второй – ещё две дроби:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0},$$

и так далее.

Всю совокупность добавлений можно представить в виде бинарного дерева (см. рис. 1). В этом дереве каждая несократимая дробь встречается ровно один раз. Поддерево дерева Штерна-Броко, содержащее только рациональные числа из отрезка $[0,1]$, называется деревом Фарея. Последнее время дерево Фарея широко используется в теории динамических систем[9].

Последовательность (ряд) Фарея $\mathcal{F}_n$ порядка n – это возрастающий набор рациональных чисел со знаменателями, не превосходящими $n$, из отрезка $[0,1]$. Запишем ее в виде

$$\mathcal{F}_n = \{0 = \xi_{0,n}, ..., \xi_{\nu,n}, ..., \xi_{\#\mathcal{F}_n,n} = 1\}.$$

Перечислим некоторые свойства последовательностей Фарея.

I. Количество элементов в последовательности Фарея $\mathcal{F}_n$ есть

$$\#\mathcal{F}_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k),$$

где $\varphi(k)$ – функция Эйлера.

II. Для предельной функции распределения последовательностей Фарея очевидно равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\#\{\xi \in \mathcal{F}_n : \ \ \xi \le x\}}{\#\mathcal{F}_n} = x.$$

III. Известная теорема Дж. Франеля[10] гласит, что знаменитая гипотеза Б. Римана о нулях дзета-функции эквивалентна утверждению о том, что

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\#\mathcal{F}_n} \left|\xi_{\nu,n} - \frac{\nu}{\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)}\right|^2\right)^{1/2} = O_\varepsilon(n^{-1/2+\varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

Этот результат обобщался многими математиками. Здесь мы упомянем ставшую классической работу Э. Ландау[11], а также недавнюю работу С.Б. Стечкина[12].

[9] J.C. Lagarias, C.P. Tresser. A walk along the branches of the extended Farey tree. //IBM Journal of Research and Development, Vol. 39 , No.3, стр. 283 - 294 (1995).

[10] J. Franel. "Les suites de Farey et le probleme des nombres premiers"//Gottinger Nachr (1924)

[11] E. Landau. "Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung von Herrn Franel."// Gottinger Nachrichten, 202-206 (1924)

[12] С. Б. Стечкин. "Ряды Фарея"// Матем. заметки,том 61, вып.1(1997) стр.91–113

IV. Упомянем теоремы Р. Холла[13] об асимптотиках для моментов разбиений отрезка $[0,1]$ дробями Фарея. Пусть $0 = x_{0,n} < x_{1,n} < \cdots < x_{N(n),n} = 1$ – некоторые точки в [0,1], $p_{i,n} = x_{i,n} - x_{i-1,n}, i = 1, \ldots, N(n)$ –длины интервалов $[x_{i-1,n}, x_{i,n})$ . Для фиксированного $\beta$ положим

$$\sigma_\beta\left(x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{N(n),n}\right) = \sum_{i=1}^{N(n)} p_{i,n}^\beta.$$

Очевидно, что

$$\sigma_1\left(x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{N(n),n}\right) = 1, \ \ \sigma_0\left(x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{N(n),n}\right) = N(n)$$

для любого разбиения $x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{N(n),n}$. В 1970 году Р. Холл в своей работе[13] получил следующие асимптотические формулы для величины $\sigma_\beta(\mathcal{F}_n)$ для последовательностей Фарея:

**Теорема A.**

$$\sigma_2(\mathcal{F}_n) = \frac{12}{\pi^2}\frac{1}{n^2}\left[\log n + \frac{1}{2} + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right] + O\left(\frac{\log^2 n}{n^3}\right),$$

*где $\gamma$ – константа Эйлера, $\zeta(s)$ – $\zeta$-функция Римана.*

**Теорема B.**

*Для любого целого $\beta \geq 3$*

$$\sigma_\beta(\mathcal{F}_n) = K_\beta \frac{1}{n^\beta} + O\left(\frac{\log^\theta n}{n^{\beta+1}}\right),$$

*где $\theta = 0$ при $\beta > 3$ и $\theta = 1$ при $\beta = 3$, и*

$$K_\beta = 2\frac{\zeta(\beta-1)}{\zeta(\beta)}.$$

**Теорема C.**

*Для любого целого $\beta > 0$*

$$\sigma_{-\beta}(\mathcal{F}_n) = K_{-\beta} n^{2\beta+2} + O\left(n^{2\beta+1}\log n\right),$$

[13] R.R. Hall. A note on Farey series.// J.London Math Soc.(2) 2 (1970), стр. 139-148

*где*

$$K_{-\beta} = \frac{6}{\pi^2}\left\{\frac{1}{(\beta+1)^2} - \frac{(\beta!)^2}{(2\beta+2)!}\right\}.$$

Отметим, что этот результат многократно обобщался и усиливался в работах самого Р. Холла[14], Р. Холла и Ж. Тененбаума[15], С. Канемицу[16], С. Канемицу, Р. Сита Рама Чандра Рао, А. Сива Рама Сарма[17] и других.

Теперь мы дадим определение последовательностей Штерна-Броко и перечислим их некоторые свойства, подобные свойствам последовательностей Фарея из пунктов I – IV выше.

Последовательностью Штерна-Броко порядка $n$ называется возрастающий набор $F_n$ рациональных дробей из $[0,1]$, определяемый индуктивным образом. Пусть

$$F_1 = \{0,1\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$$

и

$$F_{n+1} = F_n \cup Q_{n+1},$$

где $Q_{n+1}$ – возрастающая последовательность медиант соседних дробей в $F_n$.

Хорошо известно, что для последовательностей Штерна-Броко порядка $n$ сумма неполных частных в представлении в виде цепной дроби не превосходит $n$.

I. Количество элементов в $n$-ой последовательности Штерна-Броко есть

$$\#F_n = 2^{n-1} + 1.$$

II. Предельной функцией распределения последовательностей Штерна-Броко является известная функция Минковского $?(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\#\{\xi \in F_n : \ \xi \le x\}}{\#F_n} = ?(x).$$

[14] R. R. Hall. "On consecutive Farey arcs II"// Acta Arith. 66 (1994), 1–9.

[15] R. R. Hall and G. Tenenbaum. "On consecutive Farey arcs"// Acta Arith. 44 (1984), 397–405.

[16] S. Kanemitsu. "On some sums involving Farey Fractions."// Math. J. Okayama Univ. 20, 101 - 113. (1978)

[17] S. Kanemitsu, R. Sita Rama Chandra Rao and A. Siva Rama Sarma. "On some sums involving Farey Fractions I."//J. Math. Soc. Japan 34 (1982), 125- 142

Определение функции Минковского состоит в следующем:

$$?(0) = 0, ?(1) = 1;$$

если значение функции определено для соседних дробей $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$ в какой-либо последовательности Штерна-Броко $F_n$ порядка $n$, то

$$? \left( \frac{p + p'}{q + q'} \right) = \frac{1}{2} \left( ? \left( \frac{p}{q} \right) + ? \left( \frac{p'}{q'} \right) \right);$$

далее на отрезке $[0, 1]$ функция Минковского определяется по непрерывности. Как уже отмечалось, эта функция была введена Г. Минковским[7]. Обозначение $?(x)$ принадлежит Минковскому. Согласно результату А. Данжуа[8], если известно разложение иррационального $x \in [0, 1]$ в регулярную цепную дробь $x = [0; a_1, ..., a_t, ...]$, то

$$?(x) = \frac{1}{2^{a_1 - 1}} - \frac{1}{2^{a_1 + a_2 - 1}} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{a_1 + ... + a_n - 1}} + ....$$

Функция Минковского является монотонной и непрерывной на отрезке $[0, 1]$. Согласно теореме А. Лебега она почти всюду дифференцируема. Более того, известно[18], что ее производная почти всюду равна нулю и что она може принимать (в несобственном смысле) только два значения – 0 или $+\infty$. Функция Минковского удовлетворяет условию Липшица[19].

Особо отметим, что недавно Дж. Парадиз, П. Виадер и Л. Бибилони доказали следующую теорему[20]:

**Теорема D.**

*1. Если для вещественного иррационального $x \in (0, 1)$ в разложении в цепную дробь $x = [0; a_1, ..., a_t, ...]$ с $\kappa_1 = 1.388^+$ выполнено неравенство*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{a_1 + ... + a_t}{t} < \kappa_1$$

*и производная $?'(x)$ существует, то $?'(x) = +\infty$.*

[18] A. Denjoy, "Sur une fonction r elle de Minkowski // J. Math. Pures Appl. vol. 17 (1938) pp. 105-155.

[19] Kinney J.R. Note on a singular function of Minkowski. // Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), p. 788 - 789.

[20] Paradis J., Viader P., Bibiloni L. The derivative of Minkowski's $?(x)$ function. // J. Math. Anal. and Appl. 253 (2001), 107 - 125.

*2. Пусть $\kappa_3 = 5.319^+$ есть корень уравнения $\frac{2\log(1+x)}{\log 2} - x = 0$. Если для вещественного иррационального $x \in (0,1)$ в разложении в цепную дробь $x = [0; a_1, ..., a_t, ...]$ выполнено неравенство*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a_1 + ... + a_t}{t} \geq \kappa_3,$$

*и производная $?'(x)$ существует, то $?'(x) = 0$.*

Следует отметить, что согласно теореме А. Я. Хинчина[2], для почти всех вещественных чисел выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + ... + a_n}{n} = +\infty,$$

так что первая часть упомянутой теоремы трех авторов касается поведения производной функции Минковского на множестве меры нуль.

III. Если обозначить за $m(x)$ функцию, обратную к функции Минковского $?(x)$, и положить

$$g(x) = (m(x) - x)^2,$$
$$A = \int_0^1 g(x)dx,$$

то будет выполнено

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left(\xi_{j,n} - \frac{j}{2^n}\right)^2 = 2^n \cdot A + \theta_n, \quad |\theta_n| \leq 4.$$

где $\xi_{j,n} (j = 0, 1, \ldots, 2^n)$ – последовательность Штерна-Броко. Этот результат непосредственно вытекает из неравенства Коксмы[21] и того факта, что полная вариация функции $g(x)$ не превосходит 4.

IV. Н.Г. Мощевитин и А. Жиглявский в 2004 году в работе[22] для моментов разбиений отрезка $[0, 1]$ последовательностями Штерна-Броко получили следующее асимптотическое равенство:

---

[21] Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер. Равномерное распределение последовательностей.// М.: Наука(1985), стр. 157

[22] Moshevitin N. , Zhigljavsky A. Entropies of the partitions of the unit interval generated by the Farey tree.// Acta Arithmetica 115.1 (2004), стр. 47-58.

**Теорема Е.**

*Для любого* $\beta > 1$

$$\sigma_\beta\left(F_n\right) = \frac{2}{n^\beta}\frac{\zeta\left(2\beta-1\right)}{\zeta\left(2\beta\right)} + O\left(\frac{\log n}{n^{(\beta+1)(2\beta-1)/(2\beta)}}\right),$$

*где* $\zeta\left(s\right)$ *–* $\zeta$ *-функция Римана.*

Отметим, что в работе[23] доказано, что *для любого* $\beta < 1$ *при достаточно больших* $n$ *имеет место неравенство*

$$\sigma_\beta\left(F_n\right) \geq Ce^{\gamma n},$$

*где* $C$ *и* $\gamma$ *– некоторые положительные константы.* Многомерные обобщения имеются у Н.Г. Мощевитина и М. Виелхабера[24].

**Актуальность темы** обусловлена сказанным выше.

## Цель работы

Целью настоящей работы является исследование поведения производной функции Минковского в зависимости от неполных частных аргумента, а также уточнение существующих асимптотик для моментов разбиения единичного отрезка последовательностями Штерна-Броко.

## Научная новизна

В диссертации получены следующие результаты:

1. Уточнены критерии существования и определены значения производной функции Минковского, также показано, что производная функции Минковского равна бесконечности для всех чисел единичного отрезка с неполными частными, не превосходящими четырех;

2. Получена асимптотическая формула для моментов разбиения единичного отрезка последовательностями Штерна-Броко, улучшающая ранее известные оценки.

---

[23] M. Kessebohmer, B. O. Stratmann. Stern-Brocot pressure and multifractional spectra in ergodic theory of numbers.// Stochastics and Dynamics, Vol.4, No. 1(2004), стр. 77-84

[24] М. Виелхабер, Н. Г. Мощевитин. Асимптотики для двумерных сетей Фарея-Броко.// Доклады Академии Наук, том 416, N1,(2007) стр.11-14.

**Основные методы исследования**

В работе используются методы метрической теории чисел, действительного анализа, теории цепных дробей и свойства последовательностей Штерна-Броко.

**Теоретическая и практическая ценность работы**

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны специалистам, изучающим последовательности Штерна-Броко, цепные дроби, функцию Минковского.

**Апробация работы**

Результаты настоящей диссертации докладывались автором на следующих семинарах Механико-математического факультета МГУ и научных конференциях:

1. XIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых (МГУ, 2006);

2. «Analitical and Combinatorial Methods in Number Theory and Geometry» (МГУ, 2006);

3. Научно-исследовательский семинар по теории чисел под руководством А.А. Карацубы, Н.Г. Мощевитина, Ю.В. Нестеренко в 2006, 2007 гг.;

4. «Тригонометрические суммы и их приложения» под руководством Н.Г. Мощевитина, А.В. Устинова в 2005, 2006, 2007 гг.;

5. «Математические вопросы кибернетики» под руководством О.М. Касим-Заде в 2007 г.

**Публикации**

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 2 работах, список который приводится в конце автореферата.

**Структура и объем диссертации**

Диссертационная работа состоит из введения, 2 глав, приложения и библиографии (34 наименования). Диссертация содержит 79 страниц и 2 рисунка.

## Краткое содержание работы

**1. Содержание введения.**

Во введении изложена краткая история исследуемого вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты диссертации. Основная часть введения посвящена сравнению аналогичных свойств последовательностей Фарея и последовательностей Штерна-Броко.

**2. Содержание первой главы.**

В первой главе мы уточняем процитированную выше теорему D и доказываем следующий неулучшаемый результат.

Для $j \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\lambda_j = \frac{j + \sqrt{j^2+4}}{2}, \;\; L_j = \ln \lambda_j - j \cdot \frac{\ln 2}{2}.$$

Здесь $j < \lambda_j < j+1$. Отметим, что

$$L_2 > L_3 > L_1 > L_4 > 0 > L_5 > L_6 > \ldots \tag{1}$$

Нам понадобятся константы

$$\kappa_1 = \frac{2 \ln \lambda_1}{\ln 2} = 1.388^+, \quad \kappa_2 = \frac{4L_5 - 5L_4}{L_5 - L_4} = 4.401^+. \tag{2}$$

**Теорема 1.1.**

*1. Если для вещественного иррационального $x \in (0,1)$ в разложении в цепную дробь $x = [0; a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ с $\kappa_1$, определенным выше, выполнено неравенство*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_t}{t} < \kappa_1,$$

*то $?'(x)$ существует и $?'(x) = +\infty$.*

*2. Для любого положительного $\varepsilon$ найдется квадратичная иррациональность $x$ такая, что для нее*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{a_1+...+a_t}{t}\le\kappa_1+\varepsilon$$

*и $?'(x)=0$.*

**Теорема 1.2.**

*1. Если для вещественного иррационального $x\in(0,1)$ в разложении в цепную дробь $x=[0;a_1,...,a_t,...]$ с $\kappa_2$, определенным выше, выполнено неравенство*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{a_1+...+a_t}{t}>\kappa_2, \qquad (3)$$

*то $?'(x)$ существует и $?'(x)=0$.*

*2. Для любого положительного $\varepsilon$ найдется квадратичная иррациональность $x$ такая, что для нее*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{a_1+...+a_t}{t}\ge\kappa_2-\varepsilon$$

*и $?'(x)=+\infty$.*

Кроме этого, мы доказываем следующий результат.

**Теорема 1.3.**

*Если в разложении иррационального числа $x=[0;a_1,...,a_t,...]$ в непрерывную дробь все неполные частные $a_j$ не превосходят 4, то $?'(x)=\infty$.*

Отметим, что доказательство использует результат И.Д. Кана[25] о сравнении континуантов.

### 3. Содержание второй главы.

Во второй главе диссертации мы уточняем асимптотическое равенство Мощевитина–Жиглявского для моментов разбиения, порожденного последовательностями Броко, и доказываем следующий результат.

[25]Кан И.Д. Уточнение правила сравнения континуантов. // Дискретная математика, 2000, Т. 12, В. 3. С. 72 - 75.

**Теорема 2.1.**

*Для любого $\beta > 1$ выполнено*

$$\sigma_\beta\left(F_n\right) = \frac{1}{n^\beta}\frac{2\zeta\left(2\beta-1\right)}{\zeta\left(2\beta\right)} + \sum_{1\le k<2\beta-2} C_k \frac{1}{n^{\beta+k}} + \sum_{0\le k<\beta-2} {C^*}_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} +$$

$$+O\left(\frac{\log^{3\beta} n}{n^{3\beta-2}}\right),$$

*где* $C_k\left(\beta\right)$, $1\le k\le 2\beta-2$ , ${C^*}_k(\beta)$, $0\le k\le \beta-2$ *–некоторые положительные константы, зависящие от* $\beta$ *.*

Доказательство теоремы 2.1 опирается на вспомогательный результат, который может иметь самостоятельный интерес.

Пусть $A$ – множество всех целых векторов $a=(a_1,\ldots,a_t)$, $t\ge 1$, $a_t\ge 2$ и $a_j\ge 1$, $j=1,\ldots,t-1$.

Пусть

$$A_n = \{a=(a_1,\ldots,a_t)\in A | a_1+\cdots+a_t=n\}.$$

Каждому $a=(a_1,\ldots,a_t)\in A$ сопоставим цепную дробь $[0;a_1,\ldots,a_t]$ (так как целая часть всегда равна нулю, для краткости будем ее обозначать $[a_1,\ldots,a_t]$) и соответствующий континуант $\langle a_1,\ldots,a_t\rangle$, пустой континуант равен 1, -1-й континуант равен 0.

Рассмотрим сумму

$$\sigma_\beta(n) = \sum_{(a_1,\ldots,a_t)\in A_n} \frac{1}{\langle a_1,\ldots,a_t\rangle^{2\beta}}$$

с фиксированным $\beta > 1$ .

**Теорема 2.2.**

*Для любого $\beta>1$ с некоторыми эффективными константами ${C'}_k$, зависящими от $\beta$, выполнено неравенство*

$$\sigma_\beta(n) = \frac{1}{n^{2\beta}}\left(\frac{\zeta\left(2\beta-1\right)}{\zeta\left(2\beta\right)} + 2\left(\frac{\zeta\left(2\beta-1\right)}{\zeta\left(2\beta\right)}\right)^2\right) + \sum_{1\le k<2\beta-2} {C'}_k \frac{1}{n^{2\beta+k}} +$$

$$+O\left(\frac{\log^{4\beta} n}{n^{4\beta-2}}\right).$$

# Работы по теме диссертации

[1] *Душистова А.А.* О разбиении отрезка $[0, 1]$, порожденном последовательностями Броко. // Математический сборник, 2007, № 5, Том 198, с. 65–94.

[2] *Душистова А.А., Мощевитин Н.Г.* О производной функции Минковского $?(x)$. // Рукопись депонирована в ВИНИТИ 02.11.07 № 1018-B2007, 14 с.