

На правах рукописи

Толбей Анна Олеговна

**ЛИНЕЙНЫЙ И НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ
ЗАДАЧ ТЕОРИИ АЭРОУПРУГОСТИ ПРИ МАЛОМ
КОЭФФИЦИЕНТЕ ДЕМПФИРОВАНИЯ**

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль - 2008

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова

Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент
Куликов Анатолий Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Зейфман Александр Израилевич,

доктор физико-математических наук, профессор
Кубышкин Евгений Павлович

Ведущая организация – Рязанский государственный университет
имени С.А. Есенина

Защита состоится «___» _____ 2008 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.05 при Ярославском государственном университете имени П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Полушкина роща, д. 1.

Автореферат разослан «___» _____ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Глызин С.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Среди неконсервативных задач теории аэроупругости особое важное место занимает задача об устойчивости и колебаниях тел в потоке газа и жидкости. Аэроупругие явления (дивергенция крыла, флаттер крыла и хвостового оперения) явились побудительным мотивом к созданию многих разделов современной математики и, в частности, теории дифференциальных уравнений. Здесь достаточно вспомнить работы академиков М.В. Келдыша и М.А. Лаврентьева по созданию теории флаттера крыла. Работы М.В. Келдыша послужили прологом по созданию им и его последователями современной теории несамосопряженных дифференциальных операторов.

Данная работа посвящена изучению явления панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа. Эта задача возникла в конце 40-х г.г. прошлого столетия, в связи с изучением воздействия потока газа на обшивку летательных аппаратов, скорость которых превосходила скорость звука.

При исследовании задачи панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа можно отметить два круга вопросов. Во-первых, задача исследовалась в линейной постановке, при этом определялась так называемая критическая скорость флаттера, превышение которой влечет потерю устойчивости состояния равновесия. Многие специалисты (В.В. Болотин, П.Дж. Холмс, А.С. Вольмир и другие) неоднократно отмечали, что линейный подход недостаточен при исследовании этого явления, так как линейная теория не позволяет оценить амплитуды колебаний. Начиная с работ академика РАН В.В. Болотина, стало актуально исследование этой задачи в нелинейной постановке.

Выделим две различные ситуации при исследовании задачи панельного флаттера в сверхзвуковом потоке. Первый случай характеризуется тем, что коэффициент демпфирования является величиной порядка единицы. Тогда в линейной постановке задача сводится к определению критической скорости флаттера и введению широко известного понятия «параболы устойчивости». Обширные исследования по этому вопросу были проведены в работах В.В. Болотина и его учеников, а также А.А. Мовчана. Здесь следует отметить и ряд работ, сделанных в этом направлении в ЯрГУ им. П.Г. Демидова А.В. Душиным и Б.Д. Либерманом.

В нелинейной постановке задача сводится к распространению бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа на соответствующий класс уравнений гиперболического типа. В данной области отметим работы А.Н. Куликова, Ю.С. Колесова, П. Холмса, Дж. Марседена.

Иная задача возникает, когда коэффициент демпфирования мал. В линейной постановке эта задача была впервые рассмотрена А.А. Мовчаном, который ввел понятие нижней критической скорости флаттера и получил первые результаты в этом направлении. Отметим, что свои результаты А.А. Мовчан не довел до конца, и в его работах нет конкретного способа определения нижней критической скорости флаттера.

Надо заметить, что случай, когда коэффициент демпфирования мал, является не менее актуальным, чем «классический», так как такая ситуация может реализовываться не только, когда мало трение и конструктивное демпфирование, но и когда велика цилиндрическая жесткость. Отметим, что при исследовании данной задачи в безразмерных величинах цилиндрическая жесткость входит в знаменатель перенормированной величины демпфирования. Напомним, что достаточно часто величина цилиндрической жесткости имеет порядок 10^9 , поэтому рассматриваемая в диссертационной работе задача является актуальной как с прикладной точки зрения, так и с математической.

Математические трудности состоят в том, что при исследовании нелинейных задач возникают бифуркационные задачи более высоких порядков, чем один. В главе 2 исследование нелинейного флаттера в итоге сводится к бифуркационной задаче в случае наличия резонансной пары комплексных собственных значений у спектра устойчивости (резонанс 1:1).

Аналогичные резонансные задачи рассмотрены в следующих главах диссертации. Решение их потребовало применения современных методов нелинейной динамики.

В диссертационной работе показано, что при скоростях меньших скорости флаттера при малом коэффициенте демпфирования могут возникать неустойчивые колебания, причем в достаточно малой окрестности состояния равновесия. Последнее означает, что происходит «реальная» потеря устойчивости с последующим разрушением конструкции.

Цель работы

В диссертации рассмотрено два круга вопросов. В линейной постановке исследован вопрос о нахождении нижней критической скорости флаттера в сверхзвуковом потоке газа, если коэффициент демпфирования достаточно мал, а также о нахождении тех значений скорости набегающего потока, когда реализуются младшие резонансы для собственных частот.

В нелинейной постановке цель работы состояла в рассмотрении соответствующих бифуркационных задач, а именно, случаев резонансов собственных частот 1:1, 1:2, 1:3.

Нелинейный анализ был предпринят с целью объяснения феномена жесткого возбуждения колебаний пластинки. Последнее отмечалось в ряде экспериментов.

Методы исследования

В работе используются методы качественной теории дифференциальных уравнений, а именно, теория бифуркации, метод нормальных форм. При исследовании линейной задачи применялись некоторые методы теории дифференциальных операторов. Исполнение ряда алгоритмов предполагало применение численных методов с последующей их компьютерной реализацией. Так же в работе использовался и метод Галлеркина.

Научная новизна работы

Впервые задача о нахождении нижней критической скорости флаттера была решена практически точно, то есть без использования метода Галеркина.

Исследование бифуркационных задач с использованием нормальных форм позволило показать, что в данных задачах характерно жесткое возбуждение колебаний при скорости меньшей скорости флаттера.

Положения, выносимые на защиту

1. Определена нижняя критическая скорость флаттера. Поставленная задача сведена к задаче на условный экстремум.
2. Найдены значения скорости набегающего потока, при которых реализуются младшие резонансы собственных частот.
3. Для соответствующих этим резонансам бифуркационных задач построены нормальные формы, исследование которых позволило обнаружить режимы жесткого возбуждения колебаний.
4. Приведены различные сравнения, предложенных методик с вариантами исследования соответствующих задач на основе стандартного применения метода Галеркина. Продемонстрированы достоинства использованных в диссертации подходов.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при исследовании и других задач теории аэрогидроупругости, а также иных задач прикладной механики.

Результаты диссертации позволили с новых позиций посмотреть на классические задачи теории упругой устойчивости. При изучении задачи в линейной постановке удалось избежать применения метода Галеркина, что, несомненно, выгодно для практического применения данных методик. Тем более что задача, как правило, сводится к рассмотрению нелинейных уравнений, исследование которых с помощью компьютера не представляет больших затруднений.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались на семинаре кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова (руководители профессор С.А. Кащенко и доцент С.Д. Глызин), на конференции молодых ученых «Нелинейные волновые процессы» (Н. – Новгород, 1 – 7 марта, 2006 г.), на конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Тула, 28-30 ноября 2006 г.).

Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 8 работ, список которых приведен в конце автореферата. Три из них выполнены совместно с научным руководителем А.Н. Куликовым, которому принадлежит постановка рассмотренных задач, а также методика их исследования.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 65 наименований, и приложения. Диссертация содержит 15 рисунков.

Общий объем диссертации составляет 110 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проблемы, определяются цели и задачи настоящего исследования, научная новизна и практическая значимость работы, описываются методы исследования, излагаются положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** диссертационной работы вводится в рассмотрение уравнение, описывающее колебания удлиненной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. Первоначально основное внимание уделяется уравнению, получаемому в случае цилиндрического изгиба пластинки при отсутствии сжимающих или растягивающих усилий, в линейном приближении оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Здесь c - нормированная скорость потока газа, а g - нормированный коэффициент демпфирования. Уравнение (1) рассматривается совместно с наиболее популярными краевыми условиями шарнирного опирания

$$w(t,0) = w(t,1) = 0, \quad w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,1) = 0 \quad (2)$$

или жесткого закрепления

$$w(t,0) = w(t,1) = 0, \quad w_x(t,0) = w_x(t,1) = 0.$$

Исследование устойчивости состояния равновесия приводит к необходимости исследования двух задач на собственные значения

$$L(c)v \equiv v^{(n)} + cv' = \lambda v, \quad (3)$$

где функция $v(x)$ подчинена одному из видов краевых условий

$$v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0, \quad (4)$$

шарнирного опирания или жесткого закрепления

$$v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0.$$

При $g \sim 1$ определение критической скорости флаттера c_0 сводится к нахождению того значения c , при котором дифференциальный оператор $L(c)$ имеет собственные значения на параболе устойчивости, то есть $\lambda = \sigma^2 \pm ig\sigma$ (рисунок 1).

Если $g \ll 1$, то парабола очень узка и имеет смысл находить ту скорость $c = c_1$, при превышении которой впервые появляются комплексные собственные значения.

В конце первого параграфа, кроме постановки задачи, были доказаны ряд утверждений, характеризующих общие свойства спектра дифференциального оператора

$L(c)$. В частности показано, что для действительных собственных значений оператора $L(c)$ справедливо неравенство $\lambda \geq \pi^4$.

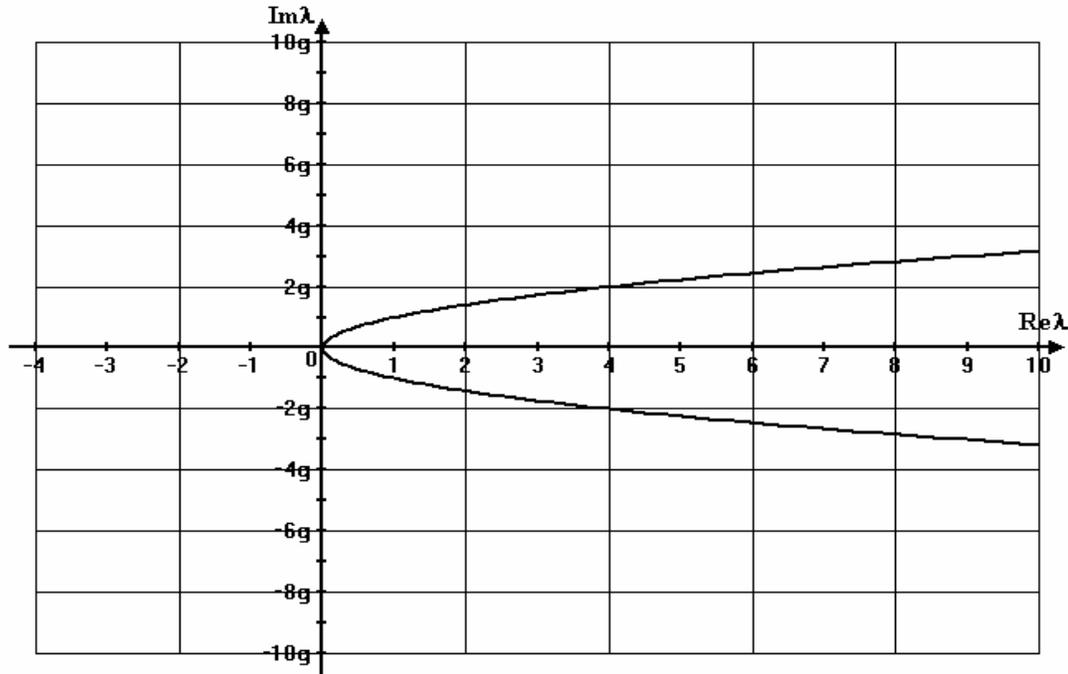


Рис. 1.

Второй параграф главы 1 посвящен нахождению искомой величины $c = c_1$ для случая как шарнирного опирания, так и жесткого закрепления.

В случае шарнирного опирания приходим к системе уравнений

$$P(\alpha, \beta) = 0, \quad (5)$$

$$F(\alpha, \beta) = 0. \quad (6)$$

Здесь $P(\alpha, \beta) = (3\alpha^4 + \beta^2 \sigma^2) \sin \beta \cdot \operatorname{sh} \sigma + 2\alpha^2 \beta \sigma [ch(2\alpha) - \cos \beta \cdot ch \sigma]$,

$$F(\alpha, \beta) = \frac{\partial P}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \beta} - \frac{\partial P}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \alpha}.$$

Отметим, что вывод уравнения (5) воспроизводит некоторые конструкции А.А. Мовчана. В работе Б.Д. Либермана было выведено аналогичное уравнение. Уравнение (5) получено для вспомогательных параметров α, β , которые связаны с основными параметрами следующими соотношениями

$$\lambda = (\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 - 3\alpha^2), \quad (7)$$

$$c = 4\alpha(\beta^2 - \alpha^2). \quad (8)$$

Так как мы ищем минимальное значение c , при котором у уравнения (5) есть действительные решения, то нашу задачу можно трактовать как задачу условного экстремума для функции (8). Необходимые условия экстремума приводят к формированию системы (5), (6) для определения α, β .

Для решения системы (5), (6) используется метод Зейделя, адаптированный к данной задаче. При этом строятся графики кривых $P(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$ (рисунок 2) и приводится алгоритм нахождения точек пересечения.

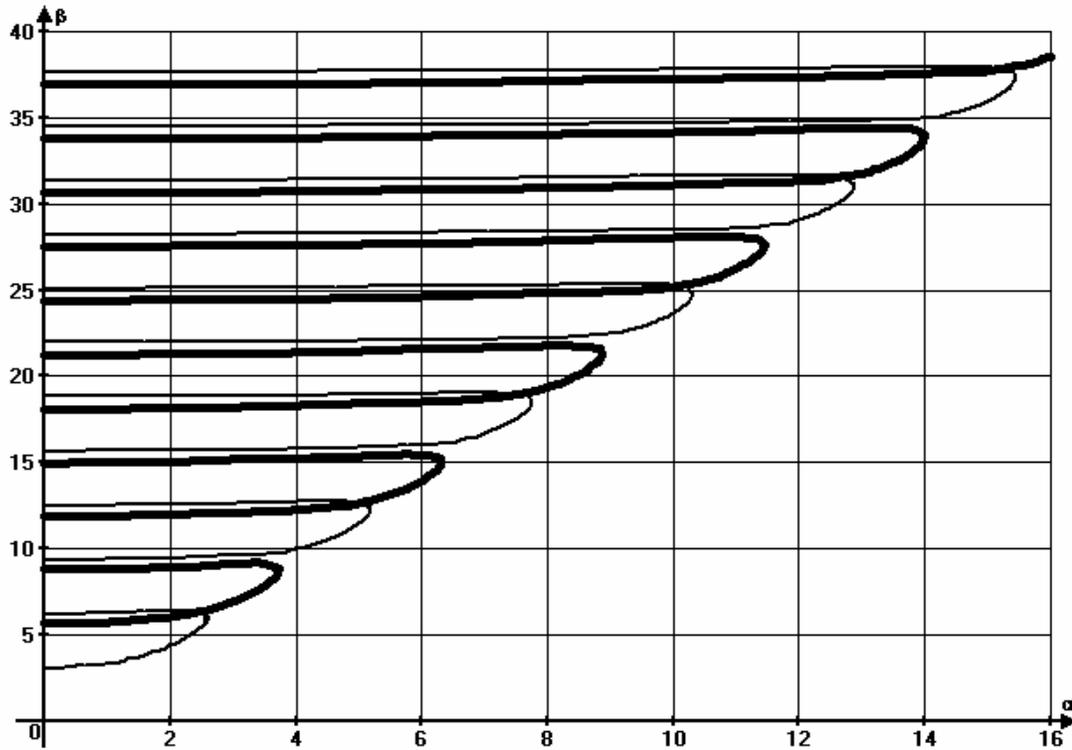


Рис. 2. Графики уравнений $P(\alpha, \beta) = 0$ (тонкий) и $F(\alpha, \beta) = 0$ (толстый)

Предыдущие построения позволили доказать следующее утверждение

Теорема 1.1. *Существует $c = c_1$, что оператор $L(c_1)v$ имеет двукратное собственное значение, которому соответствует собственная $e_0(x) = \sum_{j=1}^4 A_j \exp(\mu_j x)$ и присоединенная функции $h_0(x) = \sum_{j=1}^4 B_j \exp(\mu_j x) + x \sum_{j=1}^4 C_j \exp(\mu_j x)$.*

Также в этом параграфе рассмотрена краевая задача

$$\begin{aligned} u^{IV} + cu' &= \lambda u, \\ u(0) = u(1) = u'(0) &= u'(1) = 0 \end{aligned}$$

с краевыми условиями жесткого закрепления пластинки. И для этого варианта найдена нижняя критическая скорость флаттера.

В **третьем параграфе** главы 1 предложено сравнение полученных выше результатов с результатами метода Галеркина, часто применяемого в теории аэроупругости для решения подобного рода задач. Рассмотрен вариант двучленных, трехчленных и четырехчленных Галеркинских приближений.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию нелинейной краевой задачи

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \frac{\partial w}{\partial x} + g_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - g_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = 0, \quad (9)$$

$$w(t, 0) = w(t, 1) = 0, \quad w_{xx}(t, 0) = w_{xx}(t, 1) = 0, \quad (10)$$

представляющей один из вариантов задачи о колебаниях пластинки в сверхзвуковом потоке газа, здесь коэффициент g пропорционален коэффициенту демпфирования и $g \ll 1$. Последнее слагаемое отвечает за учет геометрической нелинейности. При больших сверхзвуковых скоростях учет только геометрической нелинейности не достаточен, поскольку аэродинамическая нелинейность становится весьма существенной. Предпоследний член уравнения (9) отвечает за аэродинамическую нелинейность. Отсутствие квадратичных слагаемых обуславливает обтекание пластинки потоком газа с одинаковыми скоростями с обеих сторон.

В первом параграфе главы 2 доказаны утверждения

Лемма 2.1. Пусть $c = c_0 + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$, ε_0 - достаточно малая положительная постоянная. Тогда оператор $L(c_0 + \varepsilon)$ имеет уже пару сопряженных собственных значений вида

$$\lambda_0(\varepsilon) = \lambda_0 \pm i\lambda_1 \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon),$$

где $\lambda_1 \approx 56,276$, а остальные собственные значения этого оператора действительные и простые.

Использование данной леммы позволяет доказать следующую теорему

Теорема 2.1. Краевая задача (9), (10) при $\varepsilon = \varepsilon_*$ и $\delta \in (0; \delta_0)$, где величина $\delta_0(\varepsilon_*)$ достаточно мала, имеет единственный устойчивый предельный цикл, который может быть задан уравнением

$$w(t; x; \delta) = \delta^{1/2} [\eta e(x; \varepsilon) \exp(i(\sigma + \delta\zeta)t) + \text{к.с.}] + O(\delta^{3/2}).$$

$$\text{Здесь } \eta = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\varepsilon}(9,898g_1 + 125,821g_2)}}, \quad \zeta = 0,014\sqrt{\varepsilon} + \frac{(-480,571g_1 + 4660,04g_2)}{2\sqrt{\varepsilon}(9,898g_1 + 125,821g_2)},$$

$$e(x; \varepsilon) = e_0(x) + \sqrt{\varepsilon} \tilde{\lambda}_1 h_0(x) + O(\varepsilon).$$

При решении нелинейной краевой задачи (9), (10) используются результаты, полученные при рассмотрении линейной задачи в предыдущей главе диссертационной работы. Применяется метод нормальных форм. Найдено автомодельное периодическое решение с амплитудой пропорциональной $\sqrt{\delta}$, таким образом, в данной постановке имеет место мягкое возбуждение автоколебаний. Результаты первого параграфа второй главы предполагают, что бифуркационный параметр δ зависит от параметра ε , который был введен для решения линейной задачи.

Основной результат главы 2 содержится во втором параграфе, где рассмотрена соответствующая краевая задача в случае близости к критическому пары кратных точек спектра устойчивости.

Второй параграф посвящен нахождению периодических решений краевой задачи (9), (10). Приведены условия их устойчивости. Показано, что в данном случае характерен жесткий режим возбуждения колебаний.

В краевой задаче (9), (10) полагаем

$$g = 2\delta g_0 \quad (g_0 > 0), \quad \varepsilon = \delta^2 a_0 \quad (a_0 \in R),$$

где δ - малый положительный параметр. Выбор коэффициентов позволяет рассмотреть задачу о бифуркации таких периодических по t решений краевой задачи (9),

(10), которые при $\delta \rightarrow 0$ сами стремятся к нулю. Использование метода нормальных форм сводит рассматриваемую задачу к рассмотрению следующего дифференциального уравнения второго порядка для комплекснозначной функции $z(s)$

$$z''(s) + 2g_0 z'(s) + az(s) + bz(s) |z(s)|^2 = 0. \quad (11)$$

Лемма 2.2. При $ab < 0$ обыкновенное дифференциальное уравнение (11) имеет семейство состояний равновесия

$$z(s) = \sqrt{\eta} \exp(ihs),$$

каждое из которых устойчиво, если $a < 0$, и неустойчиво, если выполняется противоположное неравенство.

Теорема 2.3. Существует $\delta_0 > 0$, что при $|\delta| < \delta_0$ краевая задача (9), (10) при $ab < 0$ имеет периодическое решение

$$w(t, x) = \delta \left(\sqrt{-a/b} \exp(i\sigma t) + \text{к.с.} \right) e_0(x) + \delta^2 \left(-2i\sigma g_0 \sqrt{-a/b} \exp(i\sigma t) + \text{к.с.} \right) h_0(x) + o(\delta^2).$$

Это решение устойчиво по Ляпунову, если $a < 0$, и неустойчиво, если $a > 0$.

Поскольку в прикладных задачах чаще реализуется неравенство $a > 0$, анализ формулы показывает, что найденное периодическое решение неустойчиво. В свою очередь, это означает, что в данном случае характерно жесткое возбуждение колебаний.

В третьей главе диссертационной работы проведено исследование колебаний пластинки в случае резонанса собственных частот 1:2. Произведен линейный и нелинейный анализ. Рассмотрены методы определения значения критической скорости флаттера c_2 , при котором для собственных частот реализуется резонанс 1:2.

Линейный анализ краевой задачи (1), (2) при $g = 0$ свелся к исследованию спектра дифференциального оператора (3), (4), у которого, при минимально возможном c_2 , есть два собственных значения λ и 4λ . Линейный анализ проведен с использованием метода Галеркина для двух, трех и четырех базисных функций, а также с использованием метода интегрирования соответствующего дифференциального уравнения, который был подробно представлен в первой главе данной работы для резонанса собственных частот 1:1.

Во §2 третьей главы продолжено исследование краевой задачи, моделирующей обтекание тонкой пластины сверхзвуковым потоком газа или жидкости

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \frac{\partial w}{\partial x} + \left(m_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (12)$$

Такой вариант учета аэродинамических сил соответствует квазистационарному подходу. Показано, что у краевой задачи (12), (2) есть неустойчивое периодическое решение. Для этого использован метод нормальных форм (квазинормальных форм), применение которого позволило доказать теорему

Теорема 3.1. Существует такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ краевая задача (12), (2) имеет неустойчивое периодическое решение вида

$$w(t, x, \varepsilon) = \varepsilon [d_1 \exp(i\alpha_1) \rho_1 \exp(i\sigma s) E_1(t, x) + d_2 \exp(i\alpha_2) \rho_2 \exp(i\eta) \exp(2i\sigma s) E_2(t, x) + \text{к.с.}] + o(\varepsilon).$$

Параметры построенного решения определяются из анализа нормальной формы, которая в нашем случае имеет вид

$$\begin{aligned} u_1'(s) &= -(g_0 + \beta_1 i)u_1(s) + \bar{u}_1(s)u_2(s), \\ u_2'(s) &= -(g_0 + \beta_2 i)u_2(s) + u_1^2(s). \end{aligned}$$

В §3 рассмотрена краевая задача, описывающая колебания пластинки в случае цилиндрического изгиба. При этом нелинейный анализ проведен в случае двустороннего воздействия потока газа, то есть пластинка обтекается с двух сторон потоком газа со скоростями $U_1 \approx U_2$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c_1 M \frac{\partial w}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon} M \left(d_1 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} + d_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \\ &+ \varepsilon M g_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon M g_2 \frac{\partial w}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + M^3 g_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - g_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для исследования краевой задачи (13), (2) была построена нормальная форма следующего вида

$$\begin{aligned} z_1'(s) &= -(\alpha_1 + i\beta_1)z_1 + (a_1 + ib_1)\bar{z}_1 z_2 + ib_2 z_1^2 \bar{z}_1 + ib_3 z_1 z_2 \bar{z}_2, \\ z_2'(s) &= -(\alpha_2 + i\beta_2)z_2 + (a_2 + ib_4)z_1^2 + ib_5 z_2^2 \bar{z}_2 + ib_6 z_1 \bar{z}_1 z_2. \end{aligned} \quad (14)$$

При изучении системы (14) было разобрано два случая. В первом случае, когда $b_1 = b_4 = 0$, систему (14) можно заменить системой вида

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= -\rho_1 - \rho_1 \rho_2 \cos \psi, \\ \dot{\rho}_2 &= -\rho_2 - \rho_1^2 \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= (2k_1 - k_4) + \left(\frac{\rho_1^2}{\rho_2} + 2\rho_2 \right) \sin \psi + (k_6 - 2k_2)\rho_1^2 + (k_5 - 2k_3)\rho_2^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Состояния равновесия системы (15) определяются следующим образом

$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{\cos \psi}$, а ψ находится из уравнения

$$Y_1 \xi^2 + 3\alpha_1 \xi + Y_1 + (\beta_2 - 2\beta_1) = 0,$$

где $\xi = \tan \psi$, $Y_1 = Y_2 g_0^2$. Величина Y_2 выражается через константы исходной краевой задачи.

Основными утверждениями §3 главы 3 являются следующие теоремы

Теорема 3.4. При выполнении неравенства

$$g_0^2 < \frac{9 + 4Y_2(2\beta_1 - \beta_2)}{4Y_2^2}$$

система уравнений (14) имеет два периодических решения, и это решение единственно, если $g_0^2 = \frac{9 + 4Y_2(2\beta_1 - \beta_2)}{4Y_2^2}$.

Теорема 3.5. В случае двух решений системы (14) в условиях теоремы 3.4, меньшему по амплитуде решению будет соответствовать устойчивое, а большему – неустойчивое решение системы дифференциальных уравнений (14) при $b_1 = b_4 = 0$.

Также в данном пункте краевая задача (13), (2) решалась с использованием метода Галеркина для сопоставления результатов с тем случаем, когда линейный и дальнейший анализ был предпринят на основе более точного метода из первой части пункта. В результате были представлены качественно различные значения параметров, при которых у исходной задачи разнится количество периодических решений.

В общем случае ($b_1 \neq 0, b_4 \neq 0$) у системы дифференциальных уравнений (14) найдены неустойчивые периодические решения.

Аналогичная задача была рассмотрена в работе С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова и Н.Х. Розова. Точная ссылка приведена в диссертационной работе.

Четвертая глава продолжает изучение краевой задачи, представленной в предыдущих параграфах работы. Здесь рассматривается резонанс собственных частот колебаний 1:3 и определяется критическая скорость флаттера c_3 , описанными выше способами.

В §2 проведен нелинейный анализ краевой задачи (16), (2)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + d_0 M \frac{\partial w}{\partial x} + M^3 g_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - g_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = 0, \quad (16)$$

для которой строится нормальная форма вида

$$\begin{aligned} z_1'(s) &= -(g_0 + N_{10}i)z_1(s) + \left\{ z_1(s)(N_{11}|z_1|^2 + N_{12}|z_2|^2) + N_{13}\bar{z}_1^2(s)z_2(s) \right\} i, \\ z_2'(s) &= -(g_0 + N_{20}i)z_2(s) + \left\{ z_2(s)(N_{21}|z_1|^2 + N_{22}|z_2|^2) + N_{23}z_1^3(s) \right\} i. \end{aligned} \quad (17)$$

От системы (17) удобно перейти к системе трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= -g_0 \rho_1 - N_{13} \rho_1^2 \rho_2 \sin \psi, \\ \dot{\rho}_2 &= -g_0 \rho_2 + N_{23} \rho_1^3 \sin \psi, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\dot{\psi} = 3N_{10} - N_{20} + (N_{21} - 3N_{11})\rho_1^2 + (N_{22} - 3N_{12})\rho_2^2 - 3N_{13}\rho_1\rho_2 \cos \psi + N_{23} \frac{\rho_1^3}{\rho_2} \cos \psi.$$

Далее находятся состояния равновесия системы (18). Имеем

$$\rho_1 = \gamma \rho_2, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{-g_0}{N_{13}\gamma \sin \psi}}, \quad \gamma = \sqrt{-\frac{N_{13}}{N_{23}}},$$

а ψ определяется из уравнения

$$(B_1^2 - B_2^2)\zeta^2 - 2B_0 B_2 \zeta + B_1^2 - B_0^2 = 0, \quad (19)$$

где $\zeta = \text{ctg} \psi$.

Основной результат второй части главы сформулирован в следующем утверждении

Теорема 4.1. Система дифференциальных уравнений (17) имеет столько периодических решений, сколько действительных корней имеет уравнение (19). Эти решения неустойчивы.

В заключении кратко приводятся основные результаты работы и формулируются выводы из проведенных исследований.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в ведущих журналах, включенных в перечень ВАК:

1. Толбей, А.О. Резонансные частоты собственных колебаний пластинки в сверхзвуковом потоке газа / А.О. Толбей // Вестник Поморского Университета. Серия «Естественные и точные науки». – 2006. – № 3. – С. 161–164.
2. Толбей, А.О. Резонанс 1:2 как причина возникновения колебаний пластинки при двустороннем воздействии потока газа / А.О. Толбей // Моделирование и анализ информационных систем. – 2005. – Т.12. – № 2. – С. 40–45.

Другие публикации:

3. Бекбулатова^{*}, А.О. Нелинейный флаттер. Резонанс 1:2 как источник жесткого возбуждения колебаний / А.О. Бекбулатова, А.Н. Куликов // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. – Ярославль: ЯрГУ, 2002. – Вып. 5. – С. 22–27.
4. Бекбулатова^{*}, А.О. Анализ одной феноменологической модели, встречающейся в теории аэроупругости / А.О. Бекбулатова // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. – Ярославль: ЯрГУ, 2004. – Вып. 6. – С. 25–30.
5. Толбей, А.О. Определение нижней критической скорости флаттера / А.Н. Куликов, А.О. Толбей // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. – Ярославль: ЯрГУ, 2005. – Вып. 7. – С. 157–163.
6. Толбей, А.О. Применение бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа к исследованию колебаний пластинки в сверхзвуковом потоке газа при малом коэффициенте демпфирования / А.О. Толбей // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – Вып. 8. – С. 109–114.
7. Толбей, А.О. Анализ модели В.В. Болотина нелинейного флаттера при малом коэффициенте демпфирования / А.Н. Куликов, А.О. Толбей // Тезисы докладов конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», секция «Математика» – Тула, 2006. – С. 66.
8. Толбей, А.О. О возможности жесткого возбуждения колебаний в одной из задач нелинейной теории аэроупругости / А.О. Толбей // Тезисы докладов конференции молодых ученых «Нелинейные волновые процессы». – Н. – Новгород, 2006. – С. 153.

^{*} работа Толбей А.О. опубликована под фамилией Бекбулатова А.О.

Оригинал – макет подготовлен
в редакционно – издательском отделе ЯрГУ

Отпечатано на ризографе

Ярославский государственный университет
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.