На правах рукописи

Мещеряков Виктор Владимирович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С СИСТЕМАМИ КОРНЕЙ КОКСЕТЕРОВСКОГО ТИПА

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа
Коломенского государственного педагогического института

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Голубева Валентина Алексеевна
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, доцент Лексин Владимир Павлович
	доктор физико-математических наук, профессор Онищик Аркадий Львович
Ведущая организация	Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН

Защита состоится "__" марта 2009 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова по адресу:
150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Автореферат разослан "__"________________ 2009г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Яблокова С.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В конце 80-х годов прошлого века Ч. Дунклом введены коммутирующие между собой дифференциально-разностные операторы[1], являющиеся обобщением оператора взятия производной по направлению. В настоящее время они называются *операторами Дункла.*

В определении операторов Дункла используется понятие системы корней, связанное с теорией полупростых групп и алгебр Ли.

Подмножество R евклидова пространства V (относительно скалярного произведения $(\,|\,)$) называется *системой корней* в V, если выполнены следующие условия:

(R1) Множество R конечно, порождает V и не содержит 0;

(R2) Если $\alpha \in R$, то отражение s_α относительно гиперплоскости, ортогональной α, оставляет множество R инвариантным;

(R3) Если $\alpha \in R$, то среди кратных корню α в R содержатся только $\pm\alpha$;

(R4) Для всех $\alpha, \beta \in R$ число $2\dfrac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

В теории дифференциально-разностных операторов условие (R4) часто отбрасывают и рассматривают операторы Дункла, ассоциированные с системами корней, которые в дальнейшем будут называться *системами корней коксетеровского типа.* Классификация таких систем приведена, например, в книге Дж. Хамфриса[2].

Зафиксируем в V полупространство, граничная гиперплоскость которого не содержит корней. Совокупность корней, содержащихся в этом полупространстве, называется множеством положительных корней и обозначается R_+. Выберем также семейство неотрицательных целых чисел k_α, подчиняющихся тому условию, что для всех $\beta \in R$ выполняется равенство $k_\alpha = k_{s_\beta \alpha}$. Тогда дифференциально-разностный оператор, действующий на функции на пространстве V по правилу

$$T_\xi f(x) = \partial_\xi f(x) - \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha (\alpha|\xi) \frac{f(s_\alpha x) - f(x)}{(\alpha|x)},$$

где ∂_ξ — дифференцирование в направлении $\xi \in V$, называется *оператором Дункла рационального типа.*

[1]Dunkl C.F. Differential-difference operators associated to reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc., 311, no 1 (1989), 167–183.

[2]Humphreys J.E. Reflection groups and Coxeter groups. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Операторы вида $\dfrac{s_\alpha - 1}{(\alpha|x)}$, которые переводят функцию $f(x)$ в функцию $\dfrac{f(s_\alpha x) - f(x)}{(\alpha|x)}$, применяются в исчислении Шуберта на грассманианах[3] и группах Коксетера[4]. Сами операторы Дункла используются в теории специальных функций[5,6,7,8]. В частности, для изучения полигармонических[9,10], политепловых и поливолновых[11] функций.

Они также оказываются тесно связанными с некоторыми представлениями вырожденных афинных алгебр Гекке[12,13]. Кроме того, очень скоро после своего появления, теория дифференциально-разностных операторов Дункла нашла многочисленные приложения в математической и теоретической физике[14,15]. Одним из свойств операторов Дункла является тот факт, что когда $(\xi_i)_{i=1\ldots \dim V}$ образуют ортонормированный базис пространства V, оператор $\sum\limits_i T_{\xi_i}^2$ совпадает с гамильтонианом квантовой модели Калоджеро[16,17,18]. С помощью операторов Дункла достигнуты значительные результаты в решении проблемы Адамара о гюйгенсовых операторах[19,20].

[3] Фултон У. Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии/Пер. с англ. — М.:МЦМНО, 2006. — 328 с.

[4] Hiller H. Geometry of Coxeter groups, Pitman, Boston, London and Melbourne, 1982.

[5] Dunkl C.F. Orthogonal polynomials on the sphere with octahedral symmetry, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 555–575.

[6] Dunkl C.F. Reflection groups and orthogonal polynomials on the sphere, Math. Z. 197 (1988), 33–56

[7] Yuan Xu Harmonic polynomials associated to reflection groups, Canad. Math. Bull. Vol. 43 (2000), 496–507.

[8] Rösler M. Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators, Comm. Math. Phys. 192 (1998), 519–542.

[9] Almansi E. Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n} u = 0$. Ann. Mat. Pura Appl. (3) 2 (1899), 1–51.

[10] Aronszajn N., Creese T.M., Lipkin L. J. Polyharmonic Functions, Oxford Univ. Press, New York, (1983).

[11] Ren G. B. U. Kähler Almansi decomposition for polyharmonic, polyheat and polywawe functions, Stud. Math. 172 (2006), c. 91–100.

[12] Cherednik I. A unification of the Knizhnik-Zamolodchikov equations and Dunkl operators via affine Hecke algebras, Invent. Math. 106 (191), 411–432.

[13] Opdam E. M. Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras, Acta Math. 175 (1995), 75–121.

[14] Hikami K. Dunkl operators formalism for quantum many-body problems associated with classical root systems, J. Phys. Soc. Japan 65 (1996), 394–401.

[15] Gutkin E., Satherland B. Completely integrable systems and groups generated by reflection. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 76, no. 12, 6057–6059 (1979).

[16] Kakei S. Common algebraic structure for the Calogero-Sutherland models, J. Phys. 29 (1996), 619–624.

[17] Lapointe L., Vinet L. Exact operator solution of the Calogero-Sutherland model, Comm. Math. Phys. 178 (1996), 425–452.

[18] Cowenberg W., Heckman G. and Looijenga E. On the geometry of the Calogero-Moser system, Indag. Mathem., N.S., 16 (2005), 443–459.

[19] Берест Ю. Ю., Веселов А. П. Принцип Гюйгенса и интегрируемость//УМН, №6, 1994, с. 8–78.

[20] Said S. Ben, Ørsted B. The wave equation for the Dunkl operators. Preprint 2004.

На сегодняшний момент активно ведутся исследования различных обобщений операторов Дункла. Например, изучаются свойства и возможные приложения тригонометрических и эллиптических[21,22] операторов Дункла, а также свойства дифференциально-разностных операторов, ассоциированных с комплексными группами отражений[23].

Другое направление исследований по операторам Дункла состоит в изучении общих алгебраических свойств гамильтонианов моделей Калоджеро и Сазерленда. В работе В. А. Голубевой и В. П. Лексина[24] дана конструкция операторов Дункла и гамильтонианов типа Калоджеро в наиболее общей универсальной форме, пригодной для любой системы корней, соответствующей конечной группе симметрий модели. Эти, так называемые *«универсальные»*, операторы Дункла не коммутируют и сумма их квадратов не совпадает с «универсальным» гамильтонианом типа Калоджеро. В той же работе[24] для каждой системы корней определяются алгебраические многообразия Дункла и Бете. Ограничение коммутатора «универсальных» операторов Дункла на многообразие Дункла является нулевым оператором, а ограничение суммы квадратов «универсальных» операторов Дункла на многообразие Бете совпадает с «универсальным» гамильтонианом типа Калоджеро.

Здесь и далее, ограничением оператора $\mathcal{L}$ (действующего на функциях N комплексных переменных) на подмножество $S \subset \mathbb{C}^N$ называется оператор, переводящий функцию f в функцию $(\mathcal{L}f)|_S$.

Цель диссертационной работы. Исследовать алгебраическую и геометрическую структуры алгебраических многообразий Бете и Дункла, а также пересечения этих многообразий для каждой системы корней коксетеровского типа.

Научная новизна.

1. Для каждой системы корней дана новая конструкция «универсальных» операторов Дункла. Показано, что многообразие Бете совпадает с многообразием Дункла.

[21] Buchstaber V., Felder G., Veselov A. Elliptic Dunkl operators, root systems, and functional equations, Duke Math. J. 76 (1994), 885–911.

[22] Cherednik I. Elliptic quantum many-body problem and double affine Knizhnik-Zamolodchikov equation. Comm. Math. Phys. 169 (1995), 441–461.

[23] Dunkl C.F., Opdam E. Dunkl operators for complex reflections groups, Proc. London Math. Soc. (3) 86 (2003), no 1, 70–108.

[24] Golubeva V. A. Leksin V. P. Heisenberg-Weyl operator algebras associated to the models of Calogero-Sutherland type and isomorphism of rational and trigonometric models // J. Math. Sci., 98, no 3 (2000), 291–318.

2. Для систем корней классического типа (A_n, B_n, C_n, D_n) и типа G_2 найдены системы независимых уравнений, определяющих многообразия Бете и Дункла, и вычислена их размерность. Для остальных систем корней $(E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4, I_2(p))$ указаны степени уравнений, определяющих многообразия. Для каждой системы корней описаны особенности уравнений, определяющих многообразия Бете и Дункла.

3. Показано, что для корневых систем типа A_n и D_n многообразия Бете и Дункла представляют собой плоскость, а для корневых систем типа B_n и C_n — пересечение некоторого квадратичного многообразия с многообразием Бете, которое ассоциировано с системой D_n. Для $n = 2$ многообразия Бете и Дункла совпадают с многообразием Сегре. Проанализирована связь между рангом системы корней и размерностью ассоциированных с этой системой многообразий Бете и Дункла.

4. Показано, что многообразия Бете и Дункла, соответствующие G_2, определяются уравнениями четвертой степени и зависят от чисел k_α, входящих в определение операторов Дункла. Указаны такие значения k_α, при которых рассматриваемый случай редуцируется к случаю системы A_2.

5. Установлено, что в случае систем корней типа A_n и D_n, ограничение «универсальных» операторов на соответствующие многообразия Бете и Дункла совпадает с операторами Дункла рационального типа. Для системы корней типа B_n найдено линейное подмногообразие многообразия Дункла, ограничение на которое «универсальных» операторов также приводит к рациональным операторам Дункла.

6. Получен новый способ вывода рекуррентных соотношений и дифференциального уравнения, которым удовлетворяют функции Бесселя с использованием оператора Дункла рационального типа, ассоциированного с системой корней типа A_1.

7. Найден общий вид функций, принадлежащих ядру оператора Дункла-Лапласа, ассоциированного с системой корней типа G_2. Установлена их связь с многочленами Гегенбауэра и гипергеометрическими функциями.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Результат диссертации о совпадении многообразий Бете и Дункла показывают содержательность теории «универсальных» операторов. Методы и результаты исследования могут быть использованы в алгебраической геометрии (алгебраические многообразия, конфигурации гиперплоскостей, ассоциированных с конечными группами Коксетера) и математической физике (интегрируемые модели типа Калоджеро).

Апробация результатов. Основные результаты докладывались и обсуждались на следующих конференциях: Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж 2007); Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы — 2007», посвященная памяти И.Г.Петровского (Москва, 2007); Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна (Воронеж 2008); Международная конференция по дифференциальным уравнениям и топологии, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 2008); Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2006 и 2008), а также на семинарах по геометрии и топологии многообразий малых размерностей под руководством В.П. Лексина в Коломенском государственном педагогическом институте, по уравнениям математической физики под руководством В.А. Голубевой в Коломенском государственном педагогическом институте, по аналитической теории дифференциальных уравнений под руководством Д.В. Аносова и В.П. Лексина в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах автора, список которых приведен в конце реферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация, объемом в 110 страниц состоит из оглавления, введения, трех глав, разбитых на 16 параграфов и списка литературы, содержащего 47 наименований. Каждая глава снабжена кратким введением, где даются сжатый обзор известных результатов, непосредственно связанных с содержанием данной главы, а также сводка полученных результатов.

Благодарности. Выражаю благодарность и глубокую признательность Д.В. Аносову, С.П. Хэкало, а также участникам семинара по аналитической теории дифференциальных уравнений за внимание, помощь и сотрудничество.

Особую благодарность выражаю В.А. Голубевой за руководство и пристальное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07–01–00085.

Содержание работы

Во введении обсуждается история проблемы, изучаемой в диссертационной работе. Изложены основные результаты представляемой диссертации и ее структура.

В первой главе сформулированы основные определения и утверждения, касающиеся систем корней и конечных групп, порожденных отражениями в вещественном конечномерном векторном пространстве.

Рассматривается каноническая билинейная форма, ассоциированная с приведенной и неприводимой системой корней R, которая для любых векторов x, y пространства V, порожденного R, удовлетворяет равенству

$$F_R(x,y) = \sum_{\alpha \in R} F_R(\alpha, x) F_R(\alpha, y).$$

Для каждой системы R указана связь канонической формы с исходным скалярным произведением $(\ |\ )$ на V. Например, для систем корней H_3, H_4 и $I_2(p)$, не ассоциированных ни с какими полупростыми группами и алгебрами Ли, проведены подробные вычисления. В результате получены следующие формулы:

$$F_{H_3}(x,y) = \frac{(x \mid y)}{10}, F_{H_4}(x,y) = \frac{(x \mid y)}{30}, F_{I_2(p)}(x,y) = \frac{(x \mid y)}{p}.$$

Вторая глава посвящена рассмотрению некоторых общих свойств рациональных операторов Дункла. В рамках теории этих операторов проведено элементарное исследование свойств специальных функций, ассоциированных с системами корней типа A_1 и G_2.

Для произвольной системы корней R определяются оператор Дункла-Лапласа Δ_h, действующий на пространстве вещественнозначных функций (определенных на пространстве V) по правилу

$$\Delta_h f(x) = \Delta f(x) + \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha \left[\frac{2(\nabla f(x) \mid \alpha)}{(x \mid \alpha)} - |\alpha|^2 \frac{f(x) - f(s_\alpha x)}{(x \mid \alpha)^2} \right]$$

и оператор ∇_h, определенный по правилу

$$\nabla_h f(x) = \nabla f(x) + \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha \frac{f(x) - f(s_\alpha x)}{(x \mid \alpha)} \alpha,$$

где Δ — оператор Лапласа, ∇ — оператор набла, s_α — отражение относительно корня α, а k_α — неотрицательные целые числа, обладающие следующим свойством: для любого элемента w группы Коксетера выполняется равенство $k_\alpha = k_{w\alpha}$. Для произвольного вектора $\xi \in V$ оператор Дункла T_ξ определяется формулой $T_\xi f = (\nabla_h f \mid \xi)$. В явном виде оператор Дункла

T_ξ задается формулой

$$T_\xi f(x) = \partial_\xi f(x) + \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha (\alpha \mid \xi) \frac{f(x) - f(s_\alpha x)}{(x \mid \alpha)},$$

где ∂_ξ — дифференцирование в направлении ξ.

Операторы Дункла T_ξ и оператор Дункла-Лапласа Δ_h обладают многими свойствами, которые аналогичны свойствам операторов ∂_ξ и Δ. Например, для произвольных векторов $\xi, \eta \in V$, операторы Дункла T_ξ и T_η коммутируют: $T_\xi T_\eta = T_\eta T_\xi$. А если $\{\xi_i\}_{i=1,\ldots,\dim V}$ — ортонормированный базис пространства V, то $\sum\limits_{i=1}^{n} T_{\xi_i}^2 = \Delta_h$.

Ключевым звеном в доказательстве этих свойств оказывается тождество Дункла[1], справедливость которого устанавливает следующая

Лемма. *Пусть $B(x,y)$ — билинейная форма на V, такая что $B(s_\alpha x, s_\alpha y) = B(y,x)$ для всех α из плоскости, порожденной векторами x и y. И пусть w — произвольный неединичный элемент группы Коксетера W_R. Тогда имеет место тождество Дункла*

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta \in R_+ \\ s_\alpha s_\beta = w \neq 1}} k_\alpha k_\beta \frac{B(\alpha,\beta)}{(\alpha \mid x)(\beta \mid x)} \equiv 0.$$

В случае системы корней типа A_1 оператор Дункла действует на функции по формуле

$$Tf(x) = f'(x) + k\,\frac{f(x) - f(-x)}{x},$$

где k — произвольное целое число. Решение дифференциально-разностного уравнения $Tf = f$, удовлетворяющее начальному условию $f(0) = 1$, выражается через функции Бесселя[25]

$$\mathcal{J}_\gamma(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!(1+\gamma)_r} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r},$$

где $(m)_q = m(m+1)\ldots(m+q-1)$ — символ Похгаммера. А именно, если через $\exp_k$ обозначить функцию, являющуюся решением уравнения

[25]Бейтмен Г., Эрдей А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973.

$Tf = f$, то[26,27]

$$\exp_k(x) = \mathcal{J}_{k-\frac{1}{2}}(x) + \frac{x}{2k+1}\mathcal{J}_{k+\frac{1}{2}}(x).$$

Используя такую интерпретацию функций Бесселя, дано новое доказательство рекуррентного соотношения

$$\mathcal{J}_{k-\frac{1}{2}}(x) = \mathcal{J}_{k+\frac{1}{2}}(x) + \frac{x}{2k+1}\mathcal{J}'_{k+\frac{1}{2}}(x)$$

и приведен вывод дифференциального уравнения для функций Бесселя:

$$\varphi''(x) + \frac{2k}{x}\varphi'(x) - \varphi(x) = 0.$$

В работах Ч. Дункла с помощью введенных им дифференциально-разностных операторов демонстрируется оригинальный способ получения специальных функций и получения некоторых их свойств. Им показано, что все однородные h-гармонические многочлены (т. е. многочлены, являющиеся решениями уравнения $\Delta_h f(z) = 0$), инвариантные относительно диэдральных групп $I_2(3)$ и $I_2(4)$, выражаются[28] через функции Гейзенберга и многочлены Якоби. Рассмотрены специальные функции[29,30], ассоциированные с системами корней типа A_{n-1}, B_n и D_n.

С использованием тех же методов в диссертационной работе найден общий вид однородных h-гармонических многочленов, которые инвариантны относительно действия группы G_2:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j \theta_1^{3j}\theta_2^{n-j},$$

где $\theta_1 = z\bar{z}$, $\theta_2 = z^6 - \bar{z}^6$, а коэффициенты a_j находятся из рекуррентного соотношения

$$j(2n+k_s+k_l-j)a_j - 2(n-j+1)(k_s-k_l)a_{j-1} + 4(n-j+2)(n-j+1)a_{j-2} = 0.$$

В последнем равенстве через k_s и k_l обозначены числа k_α, отвечающие коротким и длинным корням соответственно.

[26] Opdam E.M. Dunkl operators, Bessel function and the discriminant of a finite Coxeter group. Composito mathematica, 85, 3 (1993), p. 333–373.

[27] Sisi M, Soltani F. Generalized Fock spaces and Weyl relations for the Dunkl kernel on the real line//J. Math. Anal. Appl., 270, 2002.

[28] Dunkl C.F. Reflection groups and orthogonal polynomials on the sphere, Math. Z. 197 (1988), 33–56

[29] Dunkl C.F. Orthogonal polynomials on the sphere with octahedral symmetry, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 555–575.

[30] Dunkl C.F. Symmetric function and B_N-invariant spherical harmonics, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002), 10391–10408.

В частном случае, когда $k_s = k_l = k$, получено следующее предложение

Предложение 2.4.1. *Однородные h-гармонические функции, ассоциированные с системой корней типа G_2, имеют вид*

$$f(z) = (2r^6 \cos 6\theta)^n \, {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; -n-k+1; \frac{1}{\cos^2 6\theta}\right)$$

или

$$f(z) = r^{6n} \frac{n!}{(k)_n} C_n^k(\cos 6\theta),$$

где r и θ — модуль и аргумент комплексного числа z соответственно, ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция, а C_n^k — многочлен Гегенбауэра.

В третьей главе рассматриваются свойства так называемых *«универсальных» операторов Дункла*[31]. «Универсальные» операторы Дункла, ассоциированные с системой корней R, действуют на функциях от $|R_+|$ комплексных переменных, где $|R_+|$ — число положительных корней в системе R.

Пусть $F_R(x, y)$ — каноническая билинейная форма, ассоциированная с системой корней R, $\mathbb{C}^{|R_+|}$ — комплексное пространство, координаты которого занумерованы отражениями из группы Коксетера W_R, упорядоченными относительно некоторого порядка, выбранного в R. То есть вектор $u = (u_{s_\alpha})_{\alpha \in R_+}$.

Действие W_R на $\mathbb{C}^{|R_+|}$ определим следующим образом:

$$w u_{s_\alpha} = \varepsilon_w(\alpha) u_{w s_\alpha w^{-1}}, \ \forall \alpha \in R_+,$$

где

$$\varepsilon_w(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } w\alpha \in R_+; \\ -1, & \text{если } w\alpha \notin R_+. \end{cases}$$

А в пространстве комплекснозначных функций, определенных на $\mathbb{C}^{|R_+|}$, группа W_R действует по формуле

$$(wf)(u) = f(wu).$$

Введем обозначение $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial u_{s_\alpha}}$, и пусть A_γ — оператор вида

$$A_\gamma = \sum_{\alpha \in R_+} \frac{F_R(\gamma, \alpha) k_\alpha}{u_{s_\alpha}} s_\alpha.$$

[31]Golubeva V. A. Leksin V. P. Heisenberg-Weyl operator algebras associated to the models of Calogero-Sutherland type and isomorphism of rational and trigonometric models // J. Math. Sci., 98, no 3 (2000), 291–318.

Определим также «универсальные» операторы Дункла

$$\nabla_\gamma = -D_\gamma + A_\gamma,$$

для $\gamma \in R$ и «универсальный» гамильтониан типа Калоджеро

$$H_C = -\sum_{\alpha,\beta\in R_+} F_R(\alpha,\beta)\partial_\alpha\partial_\beta + \sum_{\alpha\in R_+} \frac{F_R(\alpha,\alpha)(k_\alpha^2 - k_\alpha s_\alpha)}{u_{s_\alpha}^2}.$$

Равенство $[\nabla_\gamma, \nabla_\delta] = 0$ справедливо на подмножестве (с. 5) в $\mathbb{C}^{|R_+|}$, которое называется многообразием Дункла и определяется системой уравнений

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta\\ s_\alpha s_\beta = w}} k_\alpha k_\beta \frac{F_R(\gamma,\alpha)F_R(\delta,\beta) - F_R(\gamma,\beta)F_R(\delta,\alpha)}{u_{s_\alpha}u_{s_\beta}} = 0, \text{ где } w \in W_R.$$

Аналогично, соотношение $\sum_{\gamma\in R_+} \nabla_\gamma^2 = -H_C$ выполняется лишь на подмножестве (с. 5) в $\mathbb{C}^{|R_+|}$, которое называется многообразием Бете и определяется системой уравнений

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta\\ s_\alpha s_\beta = w}} k_\alpha k_\beta \frac{F_R(\alpha,\beta)}{u_{s_\alpha}u_{s_\beta}} = 0, \text{ где } w \in W_R.$$

Далее доказывается следующая теорема.

Теорема 3.1.1. *Многообразия Бете и Дункла, построенные для произвольной системы корней коксетеровского типа, совпадают.*

Таким образом, все результаты, полученные для многообразия Бете $M_B(R)$, останутся справедливыми и для многообразия Дункла $M_D(R)$. Поэтому в дальнейшем многообразия Бете и Дункла называются *многообразиями Бете-Дункла.*

Затем описывается строение многообразий Бете-Дункла, ассоциированных с классическими системами корней (типа A_{n-1}, B_n, C_n и D_n). При этом, мы используем оригинальное определение «универсальных» операторов Дункла, которое было впервые рассмотрено в работе[31]. В этом случае многообразия Бете и Дункла задаются системами уравнений

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta\\ s_\alpha s_\beta = w}} k_\alpha k_\beta \frac{F_R(\alpha,\beta)}{(u_\alpha - u_{-\alpha})(u_\beta - u_{-\beta})} = 0$$

и

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta\in R_+\\ \alpha\neq\beta\\ s_\alpha s_\beta=w}} k_\alpha k_\beta \frac{F_R(\gamma,\alpha)F_R(\delta,\beta)-F_R(\gamma,\beta)F_R(\delta,\alpha)}{(u_\alpha-u_{-\alpha})(u_\beta-u_{-\beta})}=0$$

соответственно, где $\gamma,\delta\in R$, $w\in W(R)$.

В случае систем корней типа A_{n-1} и D_n соответствующие многообразия Бете-Дункла определяются системами линейных уравнений, т.е. являются плоскостями в комплексном пространстве размерностей $2n(n-1)$ и n^2 соответственно.

Многообразие Бете-Дункла, ассоциированное с B_n, определяется системой, которая состоит из линейных уравнений и уравнений второй степени.

Пусть $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ стандартный базис пространства, натянутого на R. Известно, что векторы $\alpha_{ij}=e_i-e_j$, $i<j$, образуют положительную подсистему системы корней типа A_{n-1}; векторы α_{ij} и $\beta_{ij}=e_i+e_j$ — положительную подсистему системы корней типа D_n; векторы α_{ij}, β_{ij}, $\gamma_i=e_i$ — положительную подсистему системы корней типа B_n. Координаты пространства $\mathbb{C}^{|R|}$, которые отвечают положительным корням α_{ij}, β_{ij}, $i<j$, и γ_i обозначим через u_{ij}, v_{ij} и w_i, а координаты, которые отвечают отрицательным корням $-\alpha_{ij}$, $-\beta_{ij}$, $i<j$, и $-\gamma_i$ — через u_{ji}, v_{ji} и w_{-i}. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.5.1. *Многообразие Бете-Дункла для системы A_{n-1} представляет собой плоскость*

$$u_{1j}-u_{1k}+u_{jk}=u_{j1}-u_{k1}+u_{kj},\qquad 1<j<k\leq n$$

в пространстве $\mathbb{C}^{n(n-1)}$ с исключенными гиперплоскостями $u_{ij}-u_{ji}=0$, где $1\leq i<j\leq n$. Его размерность равна $\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$.

Теорема 3.5.2. *Многообразие Бете-Дункла для системы корней типа D_n представляет собой пересечение плоскости, которая определяется системой уравнений*

$$\begin{cases} u_{ij}-v_{i,j+1}+v_{j,j+1}=u_{ji}-v_{j+1,i}+v_{j+1,j}, \quad 1\leq i<j<n,\\ u_{in}-v_{i,n-1}+v_{n-1,n}=u_{ni}-v_{n-1,i}+v_{n,n-1}, \quad 1\leq i<n-1,\\ u_{n-1,n}-v_{n-2,n-1}+v_{n-2,n}=u_{n,n-1}-v_{n-2,n-1}+v_{n,n-2},\\ v_{i,i+1}-v_{i,i+2}-v_{i+1,i+3}+v_{i+2,i+3}=\\ \qquad =v_{i+1,i}-v_{i+2,i}-v_{i+3,i+1}+v_{i+3,i+2}, \quad 1\leq i<n-2,\\ v_{ij}-v_{i,j+1}-v_{i+1,j}+v_{i+1,j+1}=\\ \qquad =v_{ji}-v_{j+1,i}-v_{j,i+1}+v_{j+1,i+1}, \quad 1\leq i<j-1, j<n \end{cases}$$

и множества

$$\tilde{X}_D = \mathbb{C}^{2n(n-1)} \setminus \bigcup_{1\le i<j\le n} \{u_{ij}-u_{ji}=0, v_{ij}-v_{ji}=0\}.$$

Размерность многообразия равна n^2.

Теорема 3.5.3. *Многообразие Бете-Дункла, ассоциированное с системой корней типа* B_n*, является пересечением поверхности, которая определяется системой уравнений*

$$\begin{cases} u_{ij}-v_{i,j+1}+v_{j,j+1}=u_{ji}-v_{j+1,i}+v_{j+1,j}, \quad 1\le i<j<n,\\ u_{in}-v_{i,n-1}+v_{n-1,n}=u_{ni}-v_{n-1,i}+v_{n,n-1}, \quad 1\le i<n-1,\\ u_{n-1,n}-v_{n-2,n-1}+v_{n-2,n}=u_{n,n-1}-v_{n-2,n-1}+v_{n,n-2},\\ v_{i,i+1}-v_{i,i+2}-v_{i+1,i+3}+v_{i+2,i+3}=\\ \qquad =v_{i+1,i}-v_{i+2,i}-v_{i+3,i+1}+v_{i+3,i+2}, \quad 1\le i<n-2,\\ v_{ij}-v_{i,j+1}-v_{i+1,j}+v_{i+1,j+1}=\\ \qquad =v_{ji}-v_{j+1,i}-v_{j,i+1}+v_{j+1,i+1}, \quad 1\le i<j-1, j<n,\\ (u_{ij}-u_{ji})(w_i-w_{-i}+w_j-w_{-j})=\\ \qquad =(v_{ij}-v_{ji})(w_i-w_{-i}-w_j+w_{-j}), \quad 1\le i<j\le n \end{cases}$$

и множества

$$\tilde{X}_{B_n} = \mathbb{C}^{2n^2} \setminus \bigcup_{1\le i<j\le n} \{u_{ij}-u_{ji}=0, v_{ij}-v_{ji}=0, w_i-w_{-i}=0\}.$$

Размерность многообразия равна n^2+n+1.

Так как система корней типа C_n двойственна по отношению к системе корней типа B_n, то многообразие $M_B(C_n)$ будет описываться той же системой уравнений, что и $M_B(B_n)$.

Таким образом, многообразие Бете-Дункла описано в явном виде для всех классических систем корней.

В предложенной нами конструкции «универсальных» операторов многообразия Бете-Дункла, ассоциированные с классическими системами корней, определяются системами уравнений из теорем 3.5.1 — 3.5.3, в которых координаты, занумерованные отрицательными корнями, заменены нулями.

Например, многообразие Бете-Дункла, ассоциированное с системой корней типа B_2 задается только одним уравнением $u_{ij}(w_i+w_j)=v_{ij}(w_i-w_j)$, которое заменой $Z_0=u_{12}, Z_1=v_{12}, Z_2=w_1-w_2, Z_3=w_1+w_2$, приводится к виду $Z_0Z_3-Z_1Z_2=0$. Последнее уравнение определяет многообразие Сегре[32].

[32] Харрис Дж. Алгебраическая геометрия. М.: МЦНМО, 2006.

В заключение рассматриваются ограничения «универсальных» операторов Дункла, ассоциированных с классическими системами корней, на многообразия Бете-Дункла. При этом устанавливается связь «универсальных» операторов Дункла с операторами Дункла рационального типа.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

[1] Мещеряков В.В. Многообразия Бете, ассоциированные с классическими системами корней//Математические заметки. 2007. Т. 82, №5. С. 709–718.
[2] Мещеряков В.В. «Универсальные» операторы Данкла// Успехи математических наук. 2009. Т. 64, №1. С. 155–156.

Публикации в других изданиях

[1] Мещеряков В.В. О сферических функциях, связанных с различными типами систем корней// Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов, Суздаль, 10–15 июля 2006 г. — Владимир: Владимирский государственный университет, 2006. С. 157–158.
[2] Мещеряков В.В. Специальные функции, связанные с операторами Дункла// Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы, Воронеж, 27 янв.–2 фев. 2007 г. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2007. С. 153–154.
[3] Мещеряков В.В. Многообразия Бете, ассоциированные с классическими системами корней//Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная памяти И.Г.Петровского: сборник тезисов, Москва, 21–26 мая 2007 г.-М.: Изд-во МГУ, 2007. С. 190–191.
[4] Мещеряков В.В. Функции Бесселя как обобщенные гиперболические функции//Вестник КГПИ. Математические и естественные науки, №2(3), Коломна: КГПИ, 2007. С. 62–65.
[5] Мещеряков В.В. Многообразия Бете и Дункла в модели Калоджеро и их совпадение//Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2008. Тезисы докладов. Воронеж: ВорГу, 2008. С. 106–107.
[6] Мещеряков В.В. Универсальная модель Калоджеро со спином и многообразия Дункла//Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л.С.

Понтрягина (1908–1988): тезисы докладов, Москва, 17–22 июня 2008 г.— М.: Изд-во МГУ, 2008. С. 474–475.
[7] Мещеряков В.В. Универсальные операторы Дункла и многообразия, связанные с ними.// Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов, Суздаль, 27 июня–2 июля 2008 г. — Владимир: Владимирский государственный университет, 2006. С. 178–180.
[8] Meshcheryakov V. On coincidence of two manifolds associated to Calogero model// Journal of Dynamical and Control Systems. 2009. Vol. 15. C. – . (принято к печати)